



DOI 10.24412/2181-1431-2023-3-9-13

Манлиева Ж.Х.

РАСШИРЕНИЯ МЕТОДА КОМБИНИРОВАНИЯ СВЯЗЕЙ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ СИСТЕМ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ НЕИДЕАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ

Манлиева Ж.Х. - к.т.н., доцент кафедры «Инженерная механика» Навоийского государственного горно-технологического университета

Аннотация. В статье исследовано движения механических систем с неидеальными связями путем использования расширенного метода комбинирования связей. Предложено теоретических положений к решению конкретных задач. А также исследовано на устойчивость программных движений фрикционного регулятора при наличии условной неидеальной связи и их оптимальная стабилизация.
Ключевые слова: неидеальные связи, комбинирование связей, силы трения, фрикционный регулятор, устойчивость и стабилизация движения.

GEOMETRIK NOIDEAL BOGLANISHLAR BILAN TIZIMLARNI O'RGANISHDA BOG'LANISHLARNI BIRASHTIRISH USULINING KENGAYTIRISHLARI

Mangliyeva J.X. - Navoiy davlat konchilik va texnologiyalar universiteti "Muhandislik mexanikasi" kafedrasida dotsenti.

Annotatsiya. Ushbu maqolada bog'lanishlarni kombinatsiyalashning kengaytirilgan usuli yordamida noideal bog'lanishli mexanik sistemalar harakatini o'rganilgan (ishqalanishga ega bo'lgan bog'lanishlar, servobog'lanishlar). Bog'lanishlarni kombinatsiyalashning kengaytirilgan usuli yordamida taxlil qilish mumkin bo'lgan golonom va nogolonom sistemalar sinfini ajratilgan. Bundan tashqari nazariy natijalarni aniq misollarga qo'llash, xususan noideal shartli bog'lanish ostidagi friksion regulyatorning harakatini ustivorlikga tekshirish va optimal stabillash tadqiq qilingan.

Kalit so'zlar: nomukammal ulanishlar, ulanishlarni birlashtirish, ishqalanish kuchlari, ishqalanish regulyatori, harakatning barqarorligi va barqarorlashtirish.

EXTENSIONS OF THE METHOD OF COMBINING CONNECTIONS IN THE STUDY OF SYSTEMS WITH GEOMETRICAL NON-IDEAL CONNECTIONS

Manglieva J.Kh. - Associate Professor, Department of Engineering Mechanics, Navoi State Mining and Technology University.

Annotation: The article examines the movements of mechanical systems with imperfect connections by using an extended method of combining connections. Theoretical provisions for solving specific problems are proposed. It is also investigated for the stability of the program movements of the friction regulator in the presence of a conditional imperfect connection and their optimal stabilization.

Keywords: imperfect connections, combining connections, friction forces, friction regulator, stability and stabilization of movement.

Введение. Даётся обоснование необходимости расширения метода комбинирования связей при исследовании систем с геометрическими неидеальными связями. На основе расширенного метода комбинирования связей получены дифференциальные уравнения движения таких систем. Решены конкретные задачи. Рассмотрена задача о движении двух материальных точек в вертикальной плоскости



ХУ, связанных жестким невесомым стержнем, одна из которых движется по горизонтальной прямой ОХ, имеющей коэффициент трения. В отличие от классического примера Пенлеве ограничения на массы точек отсутствуют. Следуя Пенлеве, реакции связей разделены на два типа: силы связей и силы трения. Сумма элементарных работ сил связей равна нулю на любом возможном перемещении. Эти силы будут одними и теми же независимо от того, обладает данная система трением или нет. Все остальные реакции связей, сумма элементарных работ которых отлична от нуля на любом возможном перемещении, войдут в состав сил трения. Показано, что метод комбинирования связей Пенлеве даёт результат (то есть силы связей не зависят от сил трения) только при равенстве масс точек. Следовательно, этот метод требует обобщения на случай произвольности инерционных свойств системы. С этой целью вводится особый вид возможных перемещений $\frac{\vec{p}\delta t}{m}$, где \vec{p} - сила трения для точки массой m . Определены составляющие силы связей, не зависящие от сил трения при произвольных массах точек, входящих в систему. Показано, что расширенный метод комбинирования связей свободен от ограничений на инерционные свойства системы. Здесь же получены дифференциальные уравнения движения системы в форме уравнений Лагранжа второго рода, в которых силы связей не зависят от сил трения

$$\frac{d}{dt}[(m + m_1)\dot{x} - m_1 l \dot{\phi} \cos \phi] = -f[(m + m_1)g + m_1 l \cos \phi \dot{\phi}^2 + m_1 l \sin \phi \dot{\phi}^2] \text{sign} \dot{x} \quad (1)$$

$$l\ddot{\phi} + \dot{x} \cos \phi + g \sin \phi = 0$$

где m, m_1 - массы точек; l - длина стержня; ϕ - угол, который стержень составляет с вертикальной осью ОУ.

Эти же уравнения получены и с помощью последовательного применения принципа освобождения от связей.

Рассматриваются системы с геометрическими неидеальными связями, в частности со связями с трением, вида

$$f_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_{3N}, t) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, a) \quad (2)$$

где x_γ ($\gamma = 1, 2, \dots, 3N$) - декартовы координаты точек системы в инерциальной системе отсчета. Следуя теории, разработанной П. Пенлеве, реакции связей раскладываются на два типа составляющих: силы связей \vec{R}_k^n и силы трения \vec{R}_k^τ ($k = 1, \dots, N$)

$$R_\gamma^n = \sum_{\alpha=1}^a \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\gamma}, \quad \sum_{\gamma=1}^{3N} R_\gamma^n \delta x_\gamma = 0, \quad (3)$$

$$R_\gamma^\tau = \sum_{i=1}^{3N-a} \mu_i \frac{\partial (m_\gamma \dot{x}_\gamma)}{\partial q_i}, \quad \sum_{\gamma=1}^{3N} R_\gamma^\tau \delta x_\gamma \neq 0, \quad (4)$$

где λ_α - неопределенные множители Лагранжа, μ_i - некоторые коэффициенты пропорциональности, q_i - обобщенные координаты. Векторы $\frac{\vec{R}_k^\tau}{m_k} \delta t$ находятся среди возможных перемещений. Силы связей не зависят от сил трения. Если коэффициенты μ_i определены как функции от λ_α , то говорят, что закон трения системы известен.

Составлены дифференциальные уравнения движения системы в форме уравнений Лагранжа первого и второго родов без ограничений на инерционные члены системы. Из общего уравнения динамики

$$\sum_{\gamma=1}^{3N} (X_\gamma + R_\gamma^\tau - m_\gamma \ddot{x}_\gamma) \delta x_\gamma = 0, \quad (5)$$

исключая, согласно уравнениям связей, зависимые скорости

$$\dot{x}_\alpha = \sum_{j=\alpha+1}^{3N} A_{\alpha j} \dot{x}_j, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, a), \quad (6)$$

получены дифференциальные уравнения движения системы в избыточных координатах М.Ф. Шульгина

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{x}_j} \right) - E_j(T^*) = X_j + \sum_{\alpha=1}^a A_{\alpha j} X_\alpha + R_j^\tau + \sum_{\alpha=1}^a A_{\alpha j} R_\alpha^\tau \quad (j = a + 1, 2, \dots, 3N), \quad (7)$$



где $E_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{\alpha=1}^a A_{\alpha j} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}$ оператор М.Ф.Шульгина, T^* -кинетическая энергия системы после исключения зависимых скоростей.

При помощи предлагаемой методики, использующей расширенный метод комбинирования связей, рассмотрены и проанализированы две конкретные задачи, в которых на системы наложены геометрические неидеальные связи. Первая задача отличается от задачи Пенлеве, рассмотренной в, тем, что на систему двух точек наложена дополнительная связь, требующая, чтобы скорость середины стержня имела направление вдоль стержня.

Составлено уравнение Лагранжа второго рода

$$\frac{1}{4}(m_1 + m_2)l \left[\frac{\ddot{\theta}}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos \theta \dot{\theta}^2}{\sin^3 \theta} \right] = m_2 g \cos \theta + \frac{X}{2 \sin \theta} + \frac{f \varepsilon}{2 \sin \theta} \left(-(m_1 + m_2)g - m_2(l\dot{\theta}^2 \frac{1}{\sin \theta} - 2g \cos^2 \theta) \right) \quad (8)$$

где $\varepsilon = \pm 1$; f - коэффициент трения, m_1, m_2 - массы точек, θ - угол между горизонтальной осью ОХ и стержнем, X - горизонтальная составляющая сил реакций связей. Уравнение (8) решено методом Рунге-Кутты для конкретных начальных условий и для конкретных значений горизонтальной силы X . Найден закон трения системы. Показано, что силы связей не зависят от сил трения при произвольном соотношении масс точек системы.

Кроме того, составлены уравнения движения в избыточных координатах

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 = X + m_1 \mu + m_2 l g \cos \theta, \quad \dot{x}_1 \sin \theta = l \dot{\theta}, \quad (9)$$

где $\mu = \frac{\varepsilon f \lambda}{m_1 + m_2}$.

Рассмотрен случай, когда имеет место трение покоя.

В качестве второй задачи голономной системы с трением рассмотрена задача Аппеля о движении лестницы, опирающейся на горизонтальный пол и вертикальную стену с различными коэффициентами трения по стене и по полу. Составлено дифференциальное уравнение движения системы в форме уравнения Лагранжа второго рода

$$(ml^2 + J + \frac{2l^2 m}{1 + f_A f_B} ((f_A - f_B) \sin \alpha \cos \alpha - f_A f_B)) \ddot{\alpha} = \frac{2ml^2}{1 + f_A f_B} (f_A \sin^2 \alpha + f_B \cos^2 \alpha) \dot{\alpha}^2 - \frac{2ml}{1 + f_A f_B} (f_A \sin \alpha + \cos \alpha) f_B g + mgl \sin \alpha, \quad (10)$$

где α - угол наклона лестницы; J - её момент инерции относительно оси, перпендикулярной к плоскости движения и проходящей через центр масс; f_A, f_B - коэффициенты трения о стену и о пол; $m, 2l$ - масса и длина лестницы.

Найдены случаи, когда уравнение интегрируется в квадратурах.

Для случая $f_A = f_B = f$ получены соотношения для составляющих сил реакций

$$R_A = \frac{m}{1 + f^2} \left[\left(\left(\frac{alf}{a - \frac{2}{3}} - f \cdot l \right) \cos \alpha - \left(\frac{alf^2}{a - \frac{2}{3}} + l \right) \sin \alpha \right) \dot{\alpha}^2 - \frac{g}{(a - \frac{2}{3})} (\cos \alpha - f \sin \alpha) ((af^2 - 1) \sin \alpha + a \cos \alpha) + fg \right] > 0, \quad (11)$$

$$R_B = \frac{m}{1 + f^2} \left[- \left(\left(\frac{a}{a - \frac{2}{3}} - 1 \right) lf \sin \alpha + \left(\frac{af^2}{a - \frac{2}{3}} + 1 \right) l \cos \alpha \right) \dot{\alpha}^2 + \frac{g}{a - \frac{2}{3}} (\sin \alpha + f \cos \alpha) ((af^2 - 1) \sin \alpha + af \cos \alpha) + g \right] > 0.$$

Построены графики изменения этих сил реакций в зависимости от угла α : на рис 1 для R_A . Здесь по оси абсцисс откладывается угол α в радианах. При увеличении угла α до 60° обе составляющие реакций убывают.

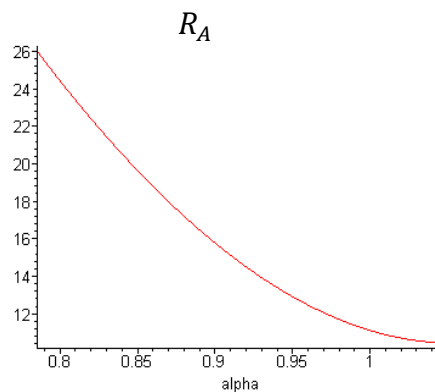


Рис.1. Изменение величины силы реакции R_A

Заклучение.

1. Дано обобщение метода комбинирования связей на основе введения особого типа возможных перемещений, снимающее ограничения на инерционные члены системы.

2. Показано, что расширенный метод комбинирования связей позволяет определить закон трения системы и составляющие сил связей, не зависящие от сил трения, при произвольных инерционных свойствах системы.

3. Показано, что расширенный метод комбинирования связей даёт возможность составить дифференциальные уравнения движения механических систем с неидеальными связями, в которых силы связей не зависят от сил трения.

4. Получены дифференциальные уравнения движения голономных систем с неидеальными связями в форме уравнений Лагранжа первого и второго родов и уравнений М.Ф.Шульгина в избыточных координатах.

5. На конкретных примерах (обобщенные задачи Пенлеве и Аппеля) показаны методика составления дифференциальных уравнений движения для систем с геометрическими неидеальными и с условными связями и методика определения сил связей и закона трения системы.

6. Дано распространение расширенного метода комбинирования связей на неголономные системы с неидеальными связями. Показано, что для таких систем имеет место общее уравнение динамики.

Список использованные литературы:

[1]. Аппель П. Теоретическая механика. Пер. с франц. – М.: Физматгиз, 1960. Т. II – 488с.

[2]. Беген А. Теория гироскопических компасов. Пер. с франц. – М.: Наука, 1967 - 192 с.

[3]. Шульгин М.Ф. О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании. Изд. САГУ.Ташкент, 1958, 183с.

[4]. Четаев Н.Г. О принципе Гаусса. Работы по аналитической механике. М.: Изд. АН СССР, 1962

[5]. Пенлеве П. Лекции о трении. Пер. с франц. – М.: Гостехиздат, 1954, 316 с.

[6]. Лурье А.И. Аналитическая механика. М: Гостехиздат, 1961, с. 824.

[7]. Азизов А.Г., Манглиева Ж.Х. Об уравнениях движения систем с трением. //Проблемы механики.-Тошкент,1997.-№6.-С. 4-7

[8]. Сидиков М.Н., Манглиева Ж.Х. «Об уравнениях движения механических систем в избыточных координатах с трением». Материалы международной



конференции «Актуальные проблемы механики и машиностроения». Алма-Ата, 2005 г. 15-18 июня.

[9]. Сидиков М.Н., Манглиева Ж.Х. «Уравнения движения системы с неидеальными геометрическими связями в избыточных координатах» Материалы Международной научно-технической конференции «Современные проблемы и перспективы механики», 2006 г. Ташкент. 17-18 май, - С. 54-55.

[10]. Juragul Manglieva Alisher D. Ibragimov Islombek G. Mustafiev investigation of the stability of programmed movements of the speed controller//design engineering Year 2021 Issue: 9 | Pages: 3576 – 3583

[11]. Манглиева Ж.Х и др «American journal of economics and business management» Optimal stabilization of partial movements of the frictional speed controller in case of imprecise fulfillment of the conditional connection Vol. 3, No.5, November-December 2020.