



DOI 10.24412/2181-1431-2023-3-5-8

© Жумаев О.А., Шермуродова М.Ф., Чулиева Г.Х.

## ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ ДИСКРЕТНОГО СИГНАЛА С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

**Жумаев Одил Абдужалилович** – профессор кафедры “Метрология, стандартизация и сертификация” Навоийского государственного горного и технологического университета, e-mail: [jumaev5216@mail.ru](mailto:jumaev5216@mail.ru),  
**Шермуродова Малика Фуркатовна** – старшая преподавательница кафедры “Автоматизация и управление” Навоийского государственного горного и технологического университета, **Чулиева Гулноза Хикматиллаевна** – стажёр-исследователь кафедры “Автоматизация и управление” Навоийского государственного горного и технологического университета, р.Узбекистан.

**Аннотация.** В данной статье рассмотрены основные типы спектральных преобразований сигналов, представленных как в аналоговой, так и в дискретной форме. Это разложение периодических функций в ряды Фурье, интегральные преобразования Фурье и Лапласа непериодических сигналов, оконное преобразование Фурье. Проанализированы процессы, происходящие при дискретизации непрерывных сигналов. Рассмотрены алгоритмы дискретного и быстрого преобразования Фурье.

**Ключевые слова:** дискретный сигнал, преобразование Фурье, ряды Фурье, аналоговые сигналы, спектр.

## FURYE ALMASHTIRISHI BILAN DISKRET SIGNALNING ANIQLIGINI OSHIRISH USULLARINI TADQIQ QILISH

**Jumaev Odil Abdusalilovich** – Navoiy davlat konchilik va texnologiyalar universiteti “Metrologiya, standartlashtirish va sertifikatlashtirish” kafedrasini professori, [jumaev5216@mail.ru](mailto:jumaev5216@mail.ru), **Shermurodova Malika Furkatovna** – Navoiy davlat konchilik va texnologiyalar universiteti “Avtomatlashtirish va boshqarish” kafedrasini katta o‘qituvchisi, **Chulieva Gulnoza Xikmatillaevna** – Navoiy davlat konchilik va texnologiyalar universiteti “Avtomatlashtirish va kafedrasini” stajyor-tadqiqotchisi, O‘zbekiston r.

**Annotatsiya.** Ushbu maqolada analog va diskret shaklda taqdim etilgan signallarning spektral o‘zgarishlarining asosiy turlari ko‘rib chiqiladi. Bu davriy funktsiyalarning Furiye qatoriga kengayishi, davriy bo‘lmagan signallarning integral Furiye va Laplas o‘zgarishlari, oynali Furiye transformatsiyasi. Uzlüksiz signallarni tanlashda sodir bo‘ladigan jarayonlar tahlil qilinadi. Diskret va tez Furiye o‘zgartirish algoritmlari ko‘rib chiqiladi.

**Kalit so‘zlar:** diskret signal, Furiye konvertatsiyasi, Furiye qatorlari, analog signallar, spektr.

## RESEARCH OF METHODS FOR INCREASING THE ACCURACY OF A DISCRETE SIGNAL USING THE FOURIER TRANSFORM

**Jumaev Odil Abdusalilovich** – professor of the department “Metrology, standardization and certification” of Navoi State University of Mining and Technologies, [jumaev5216@mail.ru](mailto:jumaev5216@mail.ru), **Shermuradova Malika Furkatovna** – senior teacher of the department “Automation and Control” of Navoi State University of Mining and Technology, **Chulieva Gulnoza Khikmatillaevna** – trainee researcher of the department “Automation and Department” Navoi State University of Mining and Technologies, Uzbekistan.

**Annotation.** This article discusses the main types of spectral transformations of signals presented in both analog and discrete form. This is the expansion of periodic functions into Fourier series, the integral Fourier and Laplace transforms of non-periodic signals, the windowed Fourier transform. The processes occurring during sampling of continuous signals are analyzed. Discrete and fast Fourier transform algorithms are considered.

**Key words:** Discreet signal, Fourier transform, Fourier series, analog signals, spectrum.



**Введение.** Ранее было показано, что спектр периодического сигнала дискретный, то есть сигнал может быть разложен по определённым гармоникам. Дискретный сигнал имеет периодический спектр. Дискретный периодический сигнал будет иметь дискретный периодический спектр. Дискретный сигнал представляется в виде последовательности значений сигнала  $x_n = x(t_n)$  в фиксированные моменты времени  $t_n = nT_s$ . У периодического дискретного сигнала значения  $x_n$  периодически повторяются через определённое количество отсчётов  $N$ , то есть для любого  $n$  выполняется  $x_n = x_{n+N}$ . Разложим исходный непрерывный сигнал в ряд Фурье:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\omega_k t}, \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{T} \quad (1)$$

Вычислим значения этого ряда в моменты времени  $t_n$  и учтём, что на периоде сигнала  $T$  находится  $N$  отсчётов, то есть  $T = NT_s$ . В получившейся сумме можно привести подобные слагаемые, так как каждое  $N$ -ое значение комплексной экспоненты одинаково:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\omega_k t_n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\frac{2\pi k}{T} n T_s} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\frac{2\pi i}{N} kn} \quad (2)$$

В получившейся сумме можно привести подобные слагаемые, так как каждое  $N$ -ое значение комплексной экспоненты одинаково:

$$e^{\frac{2\pi i}{N}(k+mN)n} = e^{\frac{2\pi i}{N}kn} \cdot e^{i2\pi mn} = e^{\frac{2\pi i}{N}kn}$$

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} A_k e^{\frac{2\pi i}{N}kn}, \quad A_k = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} c_{k+sN} \quad (3)$$

Комплексные экспоненты в разложении в ряд Фурье образуют ортонормированный базис функции, это свойство используется для нахождения коэффициентов разложения  $A_k$ . Определим скалярное произведение дискретно заданных функций  $x_n$  и  $y_n$  следующим образом:

$$(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \overline{y_n} \quad (4)$$

где чертой обозначено комплексное сопряжение. Умножив скалярно выражение для  $x_n$  в (3) на  $e^{-\frac{2\pi i}{N}mn}$  можно найти все коэффициенты  $A_k$ .

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N}mn} = \sum_{k=0}^{N-1} A_k \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}(k-m)n} \right] \quad (5)$$

Сумма в квадратных скобках может быть сосчитана как сумма геометрической прогрессии, которая вычисляется по формуле:

$$b_m = b_0 q^m, \quad S_N = \sum_{n=0}^{N-1} b_0 q^n = b_0 \frac{1-q^N}{1-q} \quad (6)$$

Сравнив сумму в квадратных скобках в (4) с (5):

$$b_0 = 1, \quad q = e^{\frac{2\pi i}{N}(k-m)} \quad (7)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}(k-m)n} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{2\pi i(k-m)}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{N}(k-m)}} = \delta_{km} = \begin{cases} 1, & m = k \\ 0, & m \neq k \end{cases}$$



Числитель дроби всегда равен нулю, а знаменатель обращается в ноль, только когда  $k = m$ . В этом случае возникшая неопределённость раскрывается по правилу Лопиталя. Если подставить в (5) вместо квадратных скобок символ Кронекера  $\delta_{km}$ , в сумме по  $k$  останется только  $A_m$ .

$$A_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{\frac{2\pi i}{N} mn} \quad (8)$$

Формула (8), определяющая коэффициенты разложения в тригонометрический ряд Фурье, называется прямым дискретным преобразованием Фурье, а формула (1) обратным дискретным преобразованием. Эти формулы симметричны и отличаются только знаком под экспонентой и постоянным множителем перед знаком суммы. Обычно дискретное преобразование Фурье сигнала, заданного отсчётами в виде вектора  $x_n$  из  $N$  элементов, вычисляется по формуле:

$$x_m = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N} mn} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{mn} \quad (9)$$

$$W_N = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$$

Обратное преобразование Фурье по формуле:

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_m e^{\frac{2\pi i}{N} mn} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_m W_N^{-mn} \quad (10)$$

Формула (7) может быть представлена произведением матрицы на вектор:

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_N^{00} & W_N^{01} & \dots & W_N^{0(N-1)} \\ W_N^{10} & W_N^{11} & \dots & W_N^{1(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^{(N-1)0} & W_N^{(N-1)1} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} \quad (11)$$

### Алгоритм быстрого преобразования Фурье

Для вычисления каждого  $X_m$  производится  $N$  операций умножения и  $N - 1$  операций сложения, то есть для вычисления всего вектора  $u$  количество операций сложения и умножения будет  $N(2N - 1)$ , величина порядка  $O(N^2)$ . При этом ещё необходимо затратить дополнительное время для вычисления всех элементов матрицы. Использование дискретного преобразования Фурье не эффективно, так как время, затрачиваемое на вычисления, пропорционально квадрату количества отсчётов.

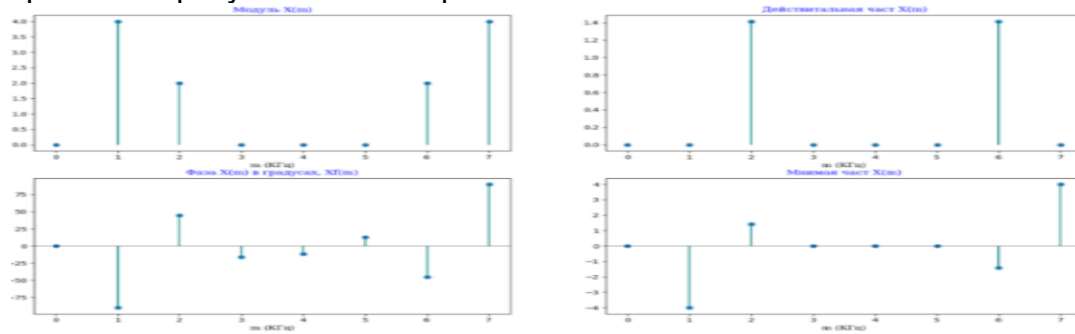
Количество операций, затрачиваемых на вычисление суммы в (102), можно значительно сократить, если количество элементов  $x_n$  может быть представлено как произведение целых чисел  $N = N_1 N_2$ . Этот алгоритм называется алгоритмом быстрого преобразования Фурье (был разработан математиками J.W. Cooley и J.W. Tukey в 1965 году). Наиболее эффективный вариант, когда  $N$  есть 2 в какой-нибудь степени, тогда количество операций, требуемых для быстрого преобразования Фурье, порядка  $O(N \ln N)$ . В этом случае  $N = 2M$ .

В формуле (102) разобьём слагаемые на две суммы, в одной будут слагаемые с чётными номерами, в другой – с нечётными:

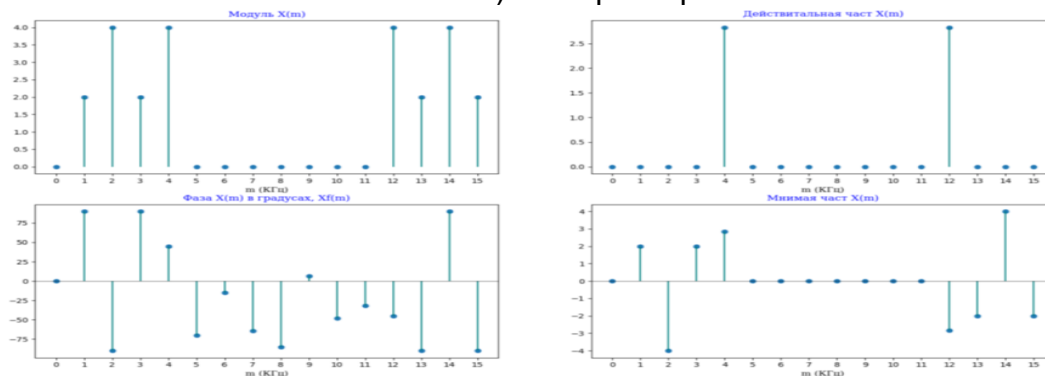
$$X_m = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2n} W_N^{2mn} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2n+1} W_N^{(2n+1)m}$$

### Результаты исследования

Сравнение результатов измерения



А). Без фильтров



Б). С помощью преобразование Фурье

### Список использованные литературы:

- [1]. Jumaev, O., Mahmudov, G., Shermurodova, M.F., Abdujalilov, A. "Development of a digital signal processing model using a frequency synthesizer and synthesis of quadrature conversion circuits" E3S Web of Conferences, 2023, 419, 01003 Jumaev, O. A., et al. "Digital control systems for asynchronous electrical drives with vector control principle." IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Vol. 862. No. 3. IOP Publishing, 2020.
- [2]. Kadirov Y.B., Samadov A.R., Goziev O.S. "Equation of dynamics of greenhouse microclimate parameters" E3S Web of Conferences 390, 03012 (2023 01 June 2023
- [3]. Jumaev, O. A., et al. "Intelligent control systems using algorithms of the entropy potential method." Journal of Physics: Conference Series. Vol. 2094. No. 2. IOP Publishing, 2021.
- [4]. Shermuradova M.F., Moxilova N.T. "Investigation of status and prospects industrial use bihydrometallurgical technologies for extracting gold from resistant ores" Zarafshon vohasini kompleks innovatsion rivojlantirish yutuqlari, muammolari va istiqbollari xalqaro ilmiy-amaliy anjumani 27-28 October, 2022. Navoi, Uzbekistan
- [5]. Жумаев О А, Исмоилов М.Т., Шермурадова М.Ф. "Разработка алгоритма повышения помехоустойчивости измерительной системы с учетом влияния фликкер – шумов" Кончилик машиналари ва технологиялари илмий-техник журнали ISSN:2181-3442 №2 2022 82-88 бб.