



# ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РАЗРАБОТКЕ МОДЕЛИ МАССИВА НЕОДНОРОДНЫХ ГОРНЫХ ПОРОД В ОБЪЕМНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ОКОЛО ПОДЗЕМНОЙ ВЫРАБОТКИ

Норель Б.К., Боровков Ю.А., Мальский К.С.

**Аннотация.** В статье рассматривается теоретический подход к разработке механико-математической модели, которая позволяет наиболее реально отразить поведение массива горных пород вблизи горной выработки по сравнению с традиционным подходом определения величины опорного давления на забой, так как она учитывает не только тензоры и девиаторы трех главных напряжений и трех главных деформаций, но и параметры Надаи-Лоде по напряжениям и деформациям, отражающие соответствие механических напряженных объемных состояний массива для неоднородных горных пород, а также энергетические показатели процесса нагружения пород.

**Annotation.** The article discusses a theoretical approach to the development of a mechanical and mathematical model, which allows the most realistic reflection of the behavior of a rock mass near a mine compared with the traditional approach to determining the value of the reference pressure at the bottomhole since it takes into account not only tensors and deviators of three principal stresses and three principal deformations but also the Nadai-Lode parameters for stresses and strains, reflecting the correspondence of mechanical stress volumetric states of the massif for heterogeneous rocks, as well as energy indicators of the process of loading rocks.

При разработке механико-математической модели напряженно-деформированного состояния массива горных пород были проанализированы математические уравнения на основе научных положений общей теории напряженного и деформированного состояния элемента сплошной среды (породы), изложенные в монографии Н.И.Безухова [2], с целью получения основных характеристик напряженного и деформированного состояния массива горных пород при его объемном нагружении, к которым относятся *инварианты главных напряжений и деформаций*.

Исходные данные компонентов поля напряжений представляются в форме тензора напряжений, которые действуют по трём взаимно перпендикулярным осям координат. Компоненты тензора напряжений состоят из девяти напряжений объемного напряженного состояния, действующего по трем взаимно перпендикулярным осям координат  $x, y, z$ , и, кроме того, эта комбинация касательных напряжений является симметричной относительно главной диагонали тензора осевых напряжений, т.е.  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ;  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ ;  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ . Написание тензора напряжений в форме математической зависимости матрицы третьего порядка представляется следующим образом:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (1)$$

В первой строке тензора напряжений расположены все компоненты напряжений, имеющие направление, параллельное оси  $x$ , во второй строке – параллельные оси  $y$ , и в третьей строке – параллельные оси  $z$ . Таким же образом составляется тензор деформаций для соответствующего поля деформаций. По положениям общей теории напряженного и деформированного состояния в точке элемента твердого тела, «напряженное и деформированное состояние в точке вполне определено, если задан тензор напряжений и тензор деформаций для этой точки» [2,10]. Из переменных компонент объемного напряженного состояния, записанного в тензоре (1) для поля напряжений, составляем математическую модель определения компонент главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , расположенных в главных координатных плоскостях, на которых касательные напряжения  $\tau_{xy} = 0$ ,  $\tau_{xz} = 0$ ,  $\tau_{yz} = 0$ , равны нулю. Математические операции состоят из следующих действий. Выбирается так называемый шаровой тензор для определения величин главных напряжений в следующей форме.

$$T_{sch} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}, \quad (2)$$

Затем составляется система тензорных уравнений, левая часть которых представляет собой разность между компонентами тензора напряжений объемного напряженного состояния (1) и компонентами тензора главных напряжений (2), у которого отличными от нуля являются только компоненты напряжений по главной диагонали. Правая часть этой системы уравнений представляется в виде нулевого вектора третьего порядка. Определитель третьего порядка, составленный из матрицы коэффициентов левой части тензорных уравнений, включающий неизвестную независимую переменную  $\sigma$ , и приравненный нулю, записывается в виде

алгебраического уравнения третьей степени относительно переменной  $\sigma$  в форме:

$$\sigma^3 - \sigma^2 \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + \sigma \cdot (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) -$$

$$-(\sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \tau_{yz}^2\sigma_{xx} - \tau_{zx}^2\sigma_{yy} - \tau_{xy}^2\sigma_{zz}) = 0$$

(3)

Коэффициенты указанного алгебраического уравнения, составленного из соотношений, выбранных на основании физических законов сохранения, для определения главных напряжений не зависят от выбора координатной системы и являются инвариантами преобразования координат напряжения тензора (1).

Математические формулы для первого, второго и третьего инвариантов напряжений записываются в виде соотношений, известных в теории сплошных сред [2]:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}, \quad (4)$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

(5)

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = (\sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \tau_{yz}^2\sigma_{xx} - \tau_{zx}^2\sigma_{yy} - \tau_{xy}^2\sigma_{zz})$$

(6)

где  $I_1, I_2, I_3$  – соответственно, первый, второй и третий инвариант главных напряжений.

При выполнении научных положений общей теории напряженного и деформированного состояния в элементе сплошной среды следует принять, что такие же выражения составляются и для трех инвариантов компонентов главных деформаций для материала сплошной однородной среды  $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$ :

$$\Psi_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3; \quad \Psi_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1;$$

$$\Psi_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3, \quad (7)$$

Представленные в формулах (4–7) инварианты комплексов главных напряжений и комплексов главных деформаций рассматриваются как основные характеристики напряженного и деформированного состояния в элементе твердого тела (однородной сплошной среды), а компоненты напряжений и деформаций, как связанные с направлениями осей координат, являющиеся вспомогательными.

Теоретическое описание протекания механических процессов в материалах однородной и неоднородной структуры с учетом изменения механических состояний и деформаций среды под действием объемного нагружения анализируется на октаэдрических механических площадках, приведенных на рис. 1, на которых формируются объемные напряженные состояния с нулевыми величинами компонент касательных напряжений в

шаровом тензоре напряжений  $T_{sch}$ , приведенном в

формуле (2). На октаэдрической площадке расположено объемное напряженное состояние, состоящее из трех главных напряжений и трех нулевых касательных напряжений [3,4].

Математические модели, которые устанавливают соотношения между третьими инвариантами главных напряжений и главных деформаций, могут быть также использованы для составления механических моделей несплошной среды и для описания механических процессов в элементах массива и неоднородных горных породах при действии объемного напряженного состояния.

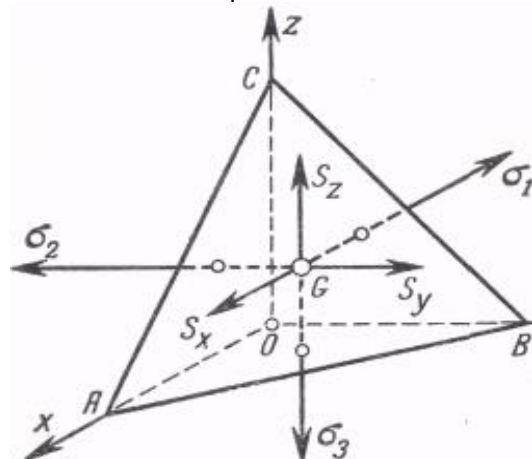


Рис.1. Тетраэдр напряжений со схемами распределения главных напряжений и их девиаторов (по классификации Надаи)

В этом случае математические уравнения параметров вторых и третьих инвариантов главных напряжений и главных деформаций дополняются к полной системе уравнений инвариантов среды в объемном напряженном состоянии параметрами, учитывающими анизотропные свойства горных пород при действии различных видов объемных напряженных состояний.

Для разработки механико-математической модели среды с физико-механическими свойствами реальных горных пород в формулы инвариантов главных напряжений и деформаций и в критерий подобия тензоров напряжений и деформаций необходимо было включить *дополнительные параметры*, которые можно получить экспериментальным путем с использованием установки трехосного неравно компонентного сжатия (УТНС), расположенной в Институте физики горных процессов Национальной Академии Наук Украины [1].

Эти исследования дополнили и расширили бы принятую в настоящее время и используемую при решении различных горных задач теорию прочности Кулона-Мора, главным недостатком которой является недоучет изменения величины промежуточного напряжения  $\sigma_2$ , принимаемой постоянной величиной и только при одном виде напряженного состояния - «сдвиге».



Методика экспериментальных исследований механических свойств горных пород включала программы опытов с осуществлением направленного варьирования величин промежуточного главного напряжения  $\sigma_2$  и равномерного, начального, всестороннего сжатия  $\sigma_0$ , при которых производилась оценка изменения вида напряженного состояния испытываемых образцов горных пород при объемном напряженном состоянии. На УТНС производились испытания при различных вариантах условий объёмного напряжённого состояния, оцениваемого по величинам отношений между главными напряжениями. Согласно принятым положениям в экспериментальной механике и прочности горных пород главными видами объемных напряженных состояний принимаются следующие виды объемных напряженных состояний: «обобщенное растяжение», «обобщенный сдвиг» и «обобщенное сжатие», которые формируются при изменении величины промежуточного главного напряжения

$\sigma_2$ . Такие определения были приняты и у известного ученого по пластичности и разрушению твердых тел А.Надаи [4].

К характеристикам показателей механических моделей горных пород дополнительно к инвариантам главных напряжений и деформаций, которые описывают изменение механического состояния при действии объемного напряженного состояния, добавляется физический показатель – параметр Надаи-Лоде ( $\mu_\sigma$ ), позволяющий численно устанавливать по соотношениям между главными напряжениями вид действующего объемного напряженного состояния.

Математическое соотношение, представляющее собой новый функционал, связывающий компоненты главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  по определенным физическим законам, записывается в форме известного параметра Надаи-Лоде:

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_3)}{\sigma_1 - \sigma_3}, \quad (8)$$

Для компонент главных напряжений, включённых в формулу (8), предусматривается выполнение алгебраического неравенства:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

При условии выполнения этого неравенства величина максимального сжимающего напряжения, принимает вид компоненты главного напряжения -  $\sigma_1$ , а величина минимального сжимающего напряжения устанавливается в виде  $\sigma_3$ . Надаи придавал большое значение геометрическому смыслу параметра  $\mu_\sigma$ . В своей монографии он определил  $\mu_\sigma$ , как коэффициент вектора относительного отклонения промежуточного

главного напряжения  $\sigma_2$  от величины гидростатического сжатия  $0,5 \cdot (\sigma_1 + \sigma_3)$  [4]. При этом становится понятной схема возможной замены величины компоненты промежуточного главного напряжения  $\sigma_2$  на величину гидростатического напряжения сжатия вблизи объемного напряженного состояния, характеризуемого как «обобщенный сдвиг». При рассмотрении параметра  $\mu_\sigma$ , как части коэффициентов в геометрической фигуре, необходимо иметь в виду соотношение:

$$\sigma_2 - \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 + \sigma_3) = \mu_\sigma \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 - \sigma_3) \quad (9)$$

Левая часть равенства представляет собой разность между величиной промежуточного главного напряжения  $\sigma_2$  и величиной гидростатического сжатия. Правая часть равенства показывает произведение максимального касательного напряжения на величину параметра Надаи-Лоде  $\mu_\sigma$ . Действительно, равенство нулю величины этого параметра показывает, что в напряженном состоянии реализуется чистый сдвиг для тензора–девиатора, а отклонение промежуточного напряжения  $\sigma_2$  от гидростатического напряжения для плоского напряженного состояния будет изменять вид традиционного разрушения сдвигом деформируемого твердого тела. Для анализа других видов равновесных, объемных напряженных состояний проведем следующие операции. Отнесем величины главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  равновесного, объемного напряженного состояния деформируемого образца горной породы из соотношения (8) на отрезок координатной оси напряженных состояний, на которой находится предельная окружность напряжённого состояния с диаметром  $\sigma_1 - \sigma_3$  и центром с величиной гидростатического напряжения  $\sigma_g$  согласно геометрической схеме теории прочности О.Мора. Рассмотрим математические операции приращения сжимающих напряжений для величин компонент главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . При этом придадим наибольшее приращение максимальному сжимающему напряжению  $\sigma_1$  и меньшие приращения остальным компонентам. При совершении этой операции с механическими характеристиками изменяются все величины  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  при условии сохранения равновесного напряженного состояния. Также изменится вид объемного напряжённого состояния и соответственно произойдет изменение величины  $\mu_\sigma$  согласно расчетам по формуле (8) от 0 в сторону +1 с учетом выполнения условия



$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Все виды равновесных напряженных состояний образца горной породы при действии объемного напряженного состояния претерпевают корректировку в пределах изменения величины  $\mu_\sigma$  от 0 до +1. Таким же образом выполняем математическую операцию по уменьшению абсолютной величины максимального сжимающего напряжения, т.е. произведем вычитание отрицательной величины приращения напряжения у величины  $\sigma_3$ . При этом наибольшее уменьшение будет для максимального сжимающего напряжения сжатия в сторону значения  $\sigma_2$ , но так, чтобы не нарушить условия алгебраического неравенства (16). При совершении этого процесса с механическими характеристиками изменяются все величины компонент главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  при условии сохранения равновесного напряженного состояния. Также изменится вид объемного напряженного состояния и соответственно произойдет уменьшение величины  $\mu_\sigma$  согласно расчету по формуле (8). При выполнении условия (16) все равновесные, объемные напряженные состояния при изменении величин приращений напряжений и изменении видов напряженных состояний будут находиться в пределах величин  $\mu_\sigma$  от 0 до -1. Из этого следует, что равновесные, объемные напряженные состояния для деформируемых твердых тел вида горных пород находятся в предельной окружности разрушений согласно геометрической схеме О.Мора в теории горного давления. Изменяющиеся виды объемных напряженных состояний определяются по расчетным величинам параметра Надаи  $\mu_\sigma$  с учетом  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  с добавлением новых механических параметров в функцию состояния массива пород -  $\Omega(\mu_\sigma, T)$ . Отметим, что все математические модели, которые могут быть составлены для аналитического описания объемных напряженных состояний деформируемых материалов с учетом параметров, характеризующих различные механические свойства при действии различных видов объемных напряженных состояний, могут быть представлены в виде функции состояния, если в неё включены два комплекса главных напряжений и главных деформаций и два параметра Надаи для главных напряжений и деформаций. Последний параметр для главных деформаций по аналогии с параметром главных напряжений имеет следующий вид:

$$\mu_\varepsilon = \frac{2\varepsilon_2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}, \quad (10)$$

Теперь, математическая формула функции состояния массива пород для компонент главных

напряжений может быть представлена в виде суммы произведений трех стандартных единичных тензоров, которые в свою очередь умножены на аналитические соотношения с механическими характеристиками.

$$\Omega(\mu_\sigma, T) = T_n \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = (\sigma_g + \mu_\sigma T) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + T \cdot (1 - \mu_\sigma) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + 2\mu_\sigma T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где  $T$  – максимальное касательное напряжение  $T = 0,5 \cdot (\sigma_1 - \sigma_3)$ ;  $\sigma_g$  - гидростатическое

напряжение сжатия  $\sigma_g = 0,5 \cdot (\sigma_1 + \sigma_3)$ ;  $T_n$  –

тензор главных компонент  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Функция механического состояния массива пород, включающая формулы с тремя тензорами объемного напряженного состояния различного вида и тремя тензорами объемного деформированного состояния, позволяет рассматривать уравнения связи между полем напряжений и полем деформаций элемента горной породы, как механическую процедуру сравнения тензоров напряженных состояний с тензорами деформируемых состояний. Определенные механические соотношения функции состояния горных пород позволяют рассчитать величины модуля сдвига  $G$  и модуля всестороннего сжатия  $K$  для трех основных видов объемного напряженного состояния (по классификации Надаи).

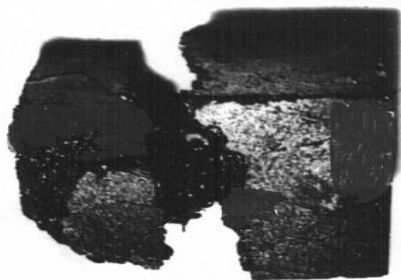
Для подтверждения разработанной механико-математической модели необходимо было провести лабораторные экспериментальные исследования на установке УТНС. Отличительной чертой деформирования образцов горных пород при объемном напряженном состоянии обобщенного растяжения является реализация компоненты деформации растяжения по направлению действия минимального сжимающего напряжения  $\sigma_3$ .

Анализ процессов деформирования образцов горных пород при этом виде объемного напряженного состояния позволил установить, что наряду с всесторонней, равномерной, объемной деформацией реализуется компонента девиатора главной деформации растяжения по направлению действия компоненты девиатора минимального сжимающего напряжения вплоть до разрушения элемента породы [10,11]. При этом компонента девиатора деформации, а иногда и самой деформации, по этому направлению являлась растягивающей и достигала значительных величин. Разрушение образцов горных пород при таком виде объемного напряженного состояния, как обобщенное растяжение, реализовалось в виде отрыва по всей плоскости, перпендикулярной направлению максимальной растягивающей деформации  $\varepsilon_1$ . Разложение тензора главных напряжений для вида объемного напряженного состояния обобщенное растяжение представлялось следующим образом

$$T_{рас} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = (\text{при } \sigma_2 = \sigma_3) =$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_3 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_1 - \sigma_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (12)$$

Отметим, что первый тензор представлял собой вид равномерного объемного напряженного состояния с компонентой напряжения максимального сжимающего напряжения  $\sigma_3$ , а второй тензор представлял собой вид одноосного напряженного состояния растяжения с величиной напряжения и разности минимального одноосного сжатия и максимального сжимающего одноосного сжатия. При условиях нагружения образца горной породы коэффициенты определения видов напряженного и деформированного состояний сохраняли равные значения. Вид разрушения образца горной пород при условиях нагружения обобщенного растяжения представлен на рис. 2.



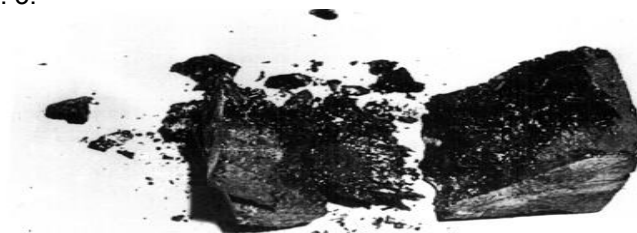
**Рис.2. Вид разрушения образца горной пород при условии нагружения обобщенного растяжения**

Анализ деформирования образцов горных пород при нагружении напряженным состоянием «обобщенного сдвига» позволил установить, что наряду с всесторонней равномерной объемной деформацией реализуется компонента девиатора главной деформации сдвига по направлению действия компоненты девиатора сдвигового напряжения  $0,5 \cdot (\sigma_3 - \sigma_1)$  вплоть до разрушения. Минимальное сжимающее напряжение сохраняло свое значение  $\sigma_3$ , максимальное сжимающее напряжение также сохраняло значение  $\sigma_1$ , а промежуточное главное напряжение  $\sigma_2$  принимало значение  $0,5 \cdot (\sigma_1 + \sigma_3)$ . Разрушение происходило по направленной трещине по всей плоскости действия сдвигового напряжения  $-0,5 \cdot (\sigma_1 - \sigma_3)$ . Разложение тензора главных напряжений для вида объемного напряженного состояния обобщенный сдвиг представляется в форме:

$$T_{сдв} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = (\text{при } \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)) =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \end{vmatrix}, \quad (13)$$

Отметим, что первое слагаемое представляет собой тензор равномерного объемного напряженного состояния с компонентой напряженного состояния полусуммы минимального и максимального сжимающих напряжений, а второе напряженное состояние представляет собой тензор чистого сдвига с величиной напряжения полусуммы максимального и минимального сжимающих напряжений. Вид разрушения образца горной породы при обобщенном сдвиге представлен на рис. 3.



**Рис. 3. Разрушения образца горной породы при обобщенном сдвиге**

На начальном этапе использования полученных экспериментальных данных механических испытаний образцов горных пород в объемном напряженном состоянии определяются основные механические характеристики образцов горных пород для сложных неоднородных и неупругих механических систем. Исходными зависимостями являлись результаты экспериментально полученных диаграмм  $I_1 = f(\psi_1)$  и  $\sigma_{окт} = \eta(\gamma_{окт})$  между первым инвариантом главных напряжений и первым инвариантом главных деформаций, а также между вторым инвариантом главных напряжений и вторым инвариантом главных деформаций:

$$K = \frac{I_1}{\psi_1}, G = \frac{\sigma_{\text{ОКТ}}}{\gamma_{\text{окт}}},$$

$$\sigma_{\text{ОКТ}} = \frac{1}{3} \cdot \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{0,5} \sigma_1 = \sigma_2 \geq \sigma_3.$$

$$\gamma_{\text{окт}} = \frac{2}{3} \cdot \left[ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 \right]^{0,5} \quad (15)$$

В число механических параметров модели деформируемой горной породы под действием объемного напряженного состояния включаются также три энергетических показателя:  $W_{\text{СЖ}}$ ,  $W_{\text{СДВ}}$ ,  $W_{\Sigma}$  - величины, соответственно, количества потенциальной энергии равномерного всестороннего сжатия, сдвига и величина полной потенциальной энергии среды. В результате протекания этого процесса полное количество потенциальной энергии при изменении объема и изменении формы элемента определяется в виде следующей зависимости:

$$W_{\Sigma} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3), \quad (16)$$

Дж. Эгер предложил аналитический вид разделения полной удельной потенциальной энергии на две составляющие [3]:

$$W_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{S^2}{K}, W_{\varphi} = \frac{1}{4G} \cdot (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \quad (17)$$

где  $W_0$  - количество потенциальной энергии, определяющее изменение объема;  $W_{\varphi}$  - количество потенциальной энергии, определяющее изменение формы;

$$S = \frac{1}{3} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

$$S_1 = \sigma_1 - S; S_2 = \sigma_2 - S; S_3 = \sigma_3 - S, \quad (18)$$

На рис. 4 представлена механическая модель распределения главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  в объемном напряженном состоянии массива [5,6] и изменение величины параметра Надаи-Люде ( $\mu_{\sigma}$ )

от +1 до -1, характеризующего различные виды объемных напряженных состояний [4,8], а полосы внизу показывают возможный характер так называемых «наведенных» трещин при реализации установленных видов предельных напряженных состояний.

При проведении горных выработок массив горных пород разделяется на три разные зоны (I – III) объемного напряженного состояния. В первой зоне объемного напряженного состояния, которая

классифицируется в механике горных пород, как зона геостатического сжатия, формируется объемное напряженное состояние с соотношениями между главными напряжениями вида

$$\sigma_1 = \sigma_2 \geq \sigma_3.$$

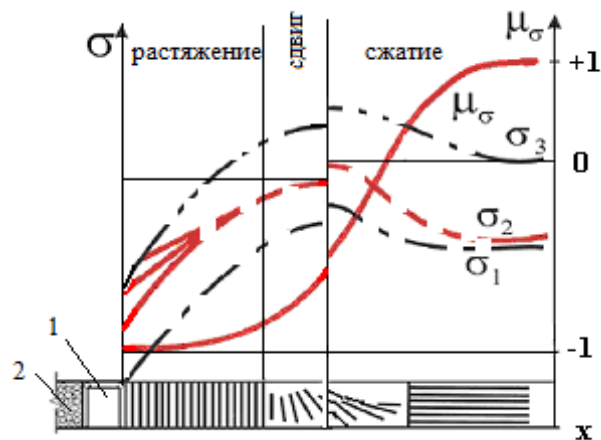


Рис.4 Схема распределения главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  в объемном напряженном состоянии массива у очистной выработки: 1 - очистная выработка; 2 - обрушенная порода

С механических позиций состояние в этой зоне можно принять равновесным. Согласно теории Надаи этот вид объемного напряженного состояния относится к обобщенному сжатию, так как  $\mu_{\sigma} = +1$ .

Во второй зоне предельных состояний главные напряжения вначале достигают своих максимальных сжимающих значений до разрушения сдвигом. После этого механическое состояние породного массива переходит в зону III пассивной разгрузки. В зоне III максимальное сжимающее напряжение  $\sigma_1$ , до начала разрушения сдвигом, реализует своё максимальное значение, а минимальное сжимающее напряжение  $\sigma_3$  возрастает значительно медленнее (см. рис. 4).

Разработанная механико-математическая модель позволяет наиболее реально отразить поведение массива горных пород вблизи горной выработки по сравнению с традиционным подходом определения величины опорного давления на забой, так как она учитывает не только тензоры и девиаторы трех главных напряжений и трех главных деформаций, но и параметры Надаи-Люде по напряжениям и деформациям, отражающие соответствие механических напряженных объемных состояний массива для неоднородных горных пород, а также энергетические показатели процесса нагружения пород. Замена в системе уравнений механико-математической модели породного массива новыми показателями параметров напряжений и деформаций представляется более информативной при оценках предельного состояния и безопасности при ведении подземных горных работ [9,12].



**Библиографический список**

- [1]. Алексеев А.Д., Недодаев Н.В. Предельное состояние горных пород, Киев, Наукова Думка, 1982. –200 с.
- [2]. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М.: Высшая школа, 1961. - 538 с.
- [3]. Дж. Эгер Упругость, прочность и текучесть. М.: Госнаучтехизд, 1961. –169 с.
- [4]. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел М.: Мир, т. 1, 1969. - 648 с.
- [5]. Норель Б.К. Изменение механической прочности угольного пласта в массиве. М. Наука 1983, 127 с.
- [6]. Норель Б.К., Боровков Ю.А. Прочность горных пород в объемном напряженном состоянии. LAMBERT Akademik PUBLISHING (978-3-659-52217-8), 2013. - 102 с.
- [7]. Норель Б.К., Боровков Ю.А., Голиков А.Г. Аналитическое исследование механических свойств горных пород при действии объемного напряженного состояния в общей теории напряженно-деформированного состояния элементов твердых тел. [Текст]/ Норель Б.К., Боровков Ю.А., Голиков А.Г. // М: Геология и разведка. 2014, №1. - с 60-66
- [8]. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. М.: Гостехиздат, 1948. – 387 с.