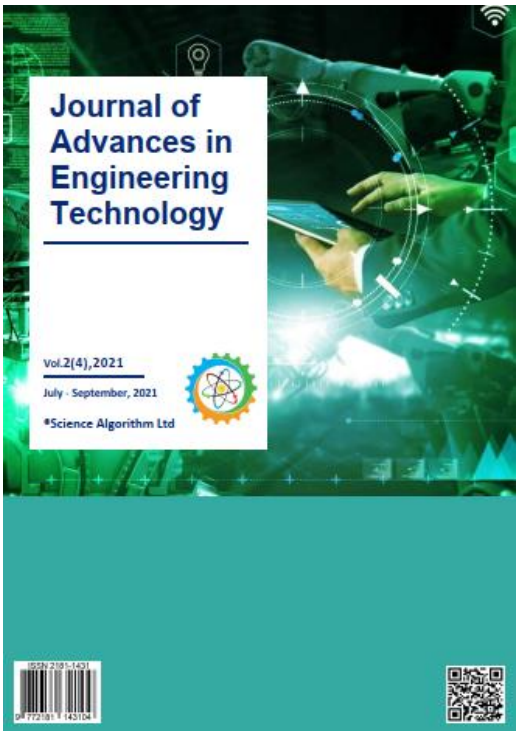

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНЫ НА ВЯЗКОУПРУГОМ ОСНОВАНИИ ВИНКЛЕРОВСКОГО ТИПА

Кульмуратов Н.Р. *- доцент кафедры «Технология машиностроения», НГГИ.*

Сафаров У.И.*- ассистент кафедры «Высшая математика» Бухарский инженерно-технологический институт.*

Хамраев Н.Н. *- ассистент кафедры «Технология машиностроения», НГГИ.*

Аннотация. Установлена взаимно связь между комплексными собственными частотами колебаний пластины произвольной формы на вязкоупругом основании Винклеровского типа с произвольными граничными условиями, собственными частотами колебаний этой пластины без упругого основания и жесткостью основания. На примере рассмотрена колебания прямоугольной пластины с опертыми краями на жестком основании. Показано, что вязкоупругие основание в значительной степени демпфирует резонансной колебания пластины.
Ключевые слова: собственные колебаний, частота, пластина, амплитуда, основание Винклера.

Аннотация: Винклер типидаги қовушқоқ эластик қатламда ихтиёрий чегаравий шартлари мавжуд бўлган ихтиёрий формадаги пластинка тебранишларининг хусусий частоталари эластик қатламсиз пластинкаларнинг тебранишларининг хусусий частоталари ва қатламларнинг қовушқоқлиги ўртасида ўзаро боғлиқлик ўрнатилганлиги аниқланди. Қовушқоқ қатламда қирралқри билан тегишиб турган туртбурчакли пластинкаларнинг тебранишларига мисол сифатида қаралади. Қовушқоқликда пластинканинг резонансли тебранишларининг катта миқдори сусайиши кўрсатилган.
Калит сўзлар: Хусусий тебраниш, частота, пластина, амплутида, Винклер катлам.

Annotation. A relationship has been established between the complex natural frequencies of vibrations of a plate of arbitrary shape on a viscoelastic Winkler-type base with arbitrary boundary conditions, the natural frequencies of vibrations of this plate without an elastic base and the rigidity of the base. By example, the vibrations of a rectangular plate with supported edges on a rigid base are considered. It is shown that the viscoelastic base significantly dampens the resonant vibrations of the plate.
Key words: natural oscillations, frequency, plate, amplitude, Winkler base.

ВВЕДЕНИЕ

Собственные калибаны пластины. Рассмотрим пластину произвольной формы толщиной h, Плотность пластины ρ, изгибная жесткость D, Смещение пластины w задается известным уравнением [5]:

$$\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D\left[\nabla^2 w - \int_0^t R_D(t-\tau)\nabla^2 w(z,\tau)d\tau\right] = 0, \qquad (1)$$

где w -пластинки, ρ–плотность материала пластинки.

$$\widetilde{D}\, f(t) = D_{0к}\left[f(t) - \int_0^t R_D(t-\tau)f(\tau)d\tau\right], \qquad (2)$$

$f(t)$ –произвольная функция времени, $R_D(t-\tau)$ ядра релаксации, $D_{0к}$ -мгновенные модули упругости. Далее заменим соотношение (2) на следующие:

$$\bar{D}f(t) = D_0\left[1 - \Gamma_D^C(\omega_R) - i\Gamma_D^S(\omega_R)\right]f(t), \qquad (3)$$

$$\Gamma_D^c(\omega_R) = \int_0^\infty R_D(\tau)\cos\omega_R\tau\, d\tau,\ \Gamma_D^c(\omega_R) = \int_0^\infty R_D(\tau)\cos\omega_R\tau\, d\tau,$$

соответственно косинус и синус изображения Фурье ядер релаксаций; ω_R - действительная величина. В расчетах использовалось трехпараметрическое ядро релаксации Колтунова-Ржаницына:

$$R_k(t) = A_k e^{-\beta_k t}/t^{1-\alpha_k}.$$

Гармонические колебания пластины описываются уравнением:

$$-\rho h\omega^2 w + \bar{D}\Delta^2 w = 0 \qquad (4)$$

где $\omega = \omega_R + i\omega_I$ - комплексная круговая частота. Примем, что решение системы уравнений (4) и (5) представляется в виде набора собственных функций un с собственными частотами ω_n n = 1, 2, 3, ..., Свободные колебания пластины имеют вид

$$w = \sum_n A_n u_n.$$

Теперь рассмотрим пластину на упругом основании Винклеровского типа с жесткостью. В уравнение движения (1) необходимо добавить силу, действующую на пластину со стороны основания:

$$\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D\Delta^2 w = -k_0\left[1 - \Gamma_k^C(\omega_R) - i\Gamma_k^S(\omega_R)\right]w \qquad (5)$$

Из (6) получаем уравнение для гармонических колебаний

$$(-\rho h\omega^2 + k_0\left[1\text{-}\Gamma_k^C(\omega_R)\text{-}i\Gamma_k^S(\omega_R)\right])w + D\Delta^2 w = 0. \qquad (6)$$

Введем частоту

$$\varpi^2 = \omega^2 - \frac{k_0\left[1\text{-}\Gamma_k^C(\omega_R)\text{-}i\Gamma_k^S(\omega_R)\right]}{\rho h},$$

тогда (6) преобразуется к виду:

$$\rho h\varpi^2 w + \bar{D}\Delta^2 w = 0. \qquad (7)$$

Уравнения (3) и (8) имеют одинаковый вид, поэтому их решения в совокупности с граничными условиями (2) также определяются набором собственных функций un, но при этом $\varpi_n = \omega_n$. Таким образом, пластина на упругом основании имеет те же собственные функции [9,10], что и ненагруженная пластина, но их собственные частоты отличаются. При этом они связаны простым выражением:

$$\Omega_n^2 = \omega_n^2 + k_0\left[1 - \Gamma_k^C(\omega_R) - i\Gamma_k^S(\omega_R)\right]/\rho h \qquad (8)$$

где Ω_n - собственные частоты пластины на вязкоупругом основании. Таким образом, если известны собственные частоты колебаний ненагруженной пластины любой формы и с любыми граничными условиями [1-5], то собственные частоты ее колебаний на упругом основании с известной жёсткостью могут быть легко найдены с помощью выражения (5). Если первая собственная частота ненагруженной пластины

ω_1 значительно больше резонансной частоты ω_0, т.е. $\omega_1 >> \omega_0$то жесткость основания мала по сравнению с жесткостью пластины, поэтому такое основание можно назвать мягким, в этом случае упругое основание не оказывает сильного влияния на собственные частоты пластины, поскольку $\Omega_n \approx \omega_n$. В противоположном случае жесткого основания, то есть, $\omega_1 << \omega_0$ несколько первых собственных частот пластины на основании имеют близкие значения $\Omega_n \approx \omega_n$при $n < n0$ для которых $\omega_{n0} < \omega_0$. Таким образом, жесткое основание значительно влияет на собственные частоты пластины. Аналогичные результаты справедливы для балки на упругом основании [5-8], для которой граничные условия (2) задаются на концах балки. Если известны собственные частоты балки с некоторыми граничными условиями, то собственные частоты балки на упругом Винклеровском основании рассчитываются согласно (5).

ВЫВОДЫ

Предложен простой способ расчёта частот собственных колебаний пластины, лежащей на сплошном упругом основании. Если известны собственные частоты пластины произвольной формы с произвольными граничными условиями и жесткость основания, то собственные частоты этой же пластины на основании могут быть рассчитаны по формуле (5), при этом формы собственных колебаний пластины не изменяются.

ЛИТЕРАТУРА

1.Salari M., Bert C.M., Striz. A.G. Free vibration of a solid circular plate free at its edge and attached to a Winkler foundation // J. Sound Vib. – 1987. - V. 118 – P. 188-191.

2. Wang C.Y. Fundamental frequency of a circular plate supported by a partial elastic foundation // J. Sound Vib. - 2005. - V. 285. - P. 1203-1209.

3. Bastian-Monarca N.A., Arenas J.P, Study of the sound radiation of a rectangular plate resting on a winkler elastic foundation // Proc, Mtgs, Acoust, - 2017. - V.28. 065002.

4. Доронин А.М., Соболева В, А, Собственные колебания круглой пластинки, лежащей на переменном упругом основании типа Винклера // Вестник ИНГУ им, 11.11. Лобачевского. - 2014. - № 4. - С. 254-258.

5. Папков С, О, Колебания прямоугольной ортотропной пластины со свободными краями: анализ и решение бесконечной системы // Акуст. журн. - 2015. – Т. 61. № 2. - С. 152-160.

6. Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. Колебания упругой полосы. - В кн.: Методы виброизоляции машин и присоединенных конструкций. М.: Наука, 1975. с. 12-42.

7. Бобровницкий Ю.Н. Соотношение ортогональности для волн Лэмба-Акуст. Журн., 1972, 18, вып. С.513-515

8. Бозоров М.Б., Сафаров И.И., Шокин Ю.И. Численное моделирование колебаний диссипативно однородных и неоднородных механических систем. СО РАН, Новосибирск, 1966, 188с.

9. Бондаренко В.С., Дубовицкой В.Р. Акустические кромочные волны в изотропных твердых телах. – Акуст. ж. 1976, т. 22, с. 284.

10. Болтаев З.И. Распространение линейных гармонических волн в протяженных плоских и цилиндрических телах с учетом вязкоупругих свойств материала. Ташкент. Фан. - 2013.-136с.