



УДК 539.3

© Сафаров И.И., Ишмаматов М.Р., Кулмуратов Н.Р.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОДВИЖНЫХ НАГРУЗОК НА НЕПОДКРЕПЛЁННЫЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ТОННЕЛЬ

**Сафаров И.И.** - Профессор зав. кафедры «Высшая математика» ТХТИ, **Ишмаматов М.Р.** - зав. кафедрой «Высшая математика и информационные технологии», НГГИ, **Кулмуратов Н.Р.** - доцент кафедры «Технология машиностроения», НГГИ.

**Аннотация.** Транспортнинг стационар юки бўшлиқ юзасида ёки бўшлиқни қобик қўмагида маҳкамланган ички юзасида таъсир қилади. Юкнинг тезлиги тадқиқ қилинаётган ер ости иншоотлари учун замонавий транспорт тезлигига мос келадиган товуш тезлиги қабул қилинади. Ярим фазовий ва қалин деворли қобикларнинг ҳаракатларини ифодалаш учун Ламе потенциаллари орқали эластик назариясининг динамик тенгламалари қўлланилади. Юпқа деворли қобиклар учун ингичка қобиклар назариясининг классик тенгламалари қўлланилади. Тенгламалар юк билан боғлиқ ҳаракатланувчи координаталар тизимида ёзилади.

**Калит сўзлар:** иборалар: қалин деворли қобик, стационар юк, бўшлиқ, ҳаракатланувчи координаталар тизими, Ламе потенциаллари, модел, устиворлик, қовушқоқлик.

**Abstract.** A stationary transport load acts on the surface of the cavity or on the inner surface of the shell supporting the cavity. The speed of the load is accepted subsonic, which corresponds to modern transport speeds in the studied underground structures. To describe the motion of half-space and thick-walled shells, the dynamic equations of the theory of elasticity in Lamé potentials are used, and for thin-walled shells, the classical equations of the theory of thin shells are used. The equations are written in a moving coordinate system associated with the load.

**Key words:** thick-walled shell, stationary load, cavity, moving coordinate system, Lamé potentials, model, stability, viscoelasticity.

### Введение.

В теоретическом аспекте решение основывалось на работах [1,2,3]. В [4,9,10] методом разложения потенциалов на плоские волны решены первая и вторая краевые задачи теории упругости для полуплоскости с сосредоточенным внутри неё точечным источником стационарных волн потенциал которого представлен через цилиндрические функции. А в [5], с использованием такого подхода, решена задача о стационарной нагрузке на контуре кругового отверстия в полупространстве. Используя идею этих работ о суперпозиции решений и переразложении плоских волн в ряды по цилиндрическим функциям, в [6] получено, в отличие точное аналитическое решение для дозвукового случая, когда скорость движущейся нагрузки меньше скорости волн Релея.

### Постановка задачи и методики решения.

Используя для исследований модельный подход, представим тоннель как бесконечно длинную круговую цилиндрическую полость радиусом  $r = R$ , расположенную в линейно-вязкоупругом, однородном и изотропном полупространстве  $x \leq h$  (рисунок 1) параллельно его горизонтальной границе (земной поверхности).

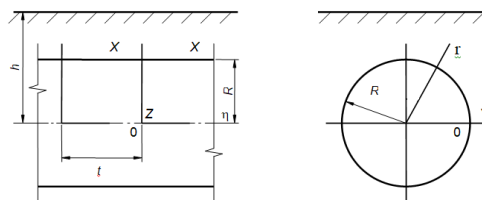


Рисунок 1-Расчётная схема неподкреплённого тоннеля

Определяется реакция полупространства движущейся с постоянной дозвуковой скоростью  $C$  по поверхности полости в направлении оси  $Z$  с нагрузкой  $P$ .

Для этого воспользуемся уравнениями движения упругой среды в векторной форме [7,8]

$$\tilde{\mu} \nabla^2 \tilde{u} + (\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}) \text{grad div } \tilde{u} = \rho \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

Здесь  $\tilde{u}(u_x, u_y, u_z)$  - вектор перемещения точек среды;

$\rho$  - плотность материала;  $u$  - компоненты перемещения;  $\nu_j$  - коэффициент Пуассона;

$$\tilde{\lambda}_j = \frac{\nu_j \tilde{E}_j}{(1 + \nu_j)(1 - 2\nu_j)}; \quad \tilde{\mu}_j = \frac{\nu_j \tilde{E}_j}{2(1 + \nu_j)},$$

где  $\tilde{E}$  - операторный модуль упругости, которые имеют вид [3,4]:

$$\tilde{E} \varphi(t) = E_{01} \left[ \varphi(t) - \int_0^t R_E(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau \right] \quad (2)$$

$\varphi(t)$  - произвольная функция времени;  $R_E(t - \tau)$  - ядро релаксации;  $E_{01}$  - мгновенной модуль упругости; Принимаем интегральные члены в (5) малыми, тогда функции  $\varphi(t) = \psi(t) e^{-i\omega_R t}$ , где  $\psi(t)$  - медленно меняющаяся функция времени,  $\omega_R$  - действительная константа. Далее применяя процедуру замораживания [3], заметим соотношения (2) приближенными вида



$$\bar{E}\varphi = E[1 - \Gamma^c(\omega_R) - i\Gamma^s(\omega_R)]\varphi,$$

где  $\Gamma^c(\omega_R) = \int_0^\infty R(\tau)\cos\omega_R\tau d\tau$ ,  $\Gamma^s(\omega_R) = \int_0^\infty R(\tau)\sin\omega_R\tau d\tau$ ,

соответственно, косинус и синус образы Фурье ядра релаксации материала. В качестве примера вязкоупругого материала примем трех параметрических ядро релаксации  $R(t) = Ae^{-\beta t} / t^{1-\alpha}$ . На функцию влияния  $R(t - \tau)$  накладываются обычные требования интегрируемости, непрерывности (кроме  $t = \tau$ ), знакоопределенности и монотонности:

$$R > 0, \frac{dR(t)}{dt} \leq 0, 0 < \int_0^\infty R(t)dt < 1.$$

$\bar{u}$  - вектор перемещений среды.

Так как рассматривается установившийся процесс, то картина деформаций стационарна по отношению к движущейся нагрузке. Поэтому удобно перейти к подвижной системе координат  $\eta = z - ct$ , связанной с нагрузкой  $P$ .

Тогда уравнение (1) перепишется в виде

$$\left(\frac{1}{M_p^2} - \frac{1}{M_s^2}\right) \text{grad div } \mathbf{u} + \frac{1}{M_s^2} \nabla^2 \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \eta^2}.$$

Здесь  $M_p = c/c_p$ ,  $M_s = c/c_s$  - числа Маха;

$c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ ,  $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$  - скорости

распространения волн расширения - сжатия и сдвига в среде.

При действии нагрузки на поверхность полости, имеем

$$\sigma_{\eta j} \Big|_{r=R} = P_j(\theta, \eta), \quad j = r, \theta, \eta, \quad (3)$$

где  $\sigma_{\eta j}$  - компоненты тензора напряжений в среде,  $P_j(\theta, \eta)$  - составляющие интенсивности подвижной нагрузки  $P(\theta, \eta)$ .

Так как граница полупространства свободна от нагрузок, то при  $x = h$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{x\eta} = 0. \quad (4)$$

Преобразуем уравнение (1.2), выразив вектор смещения упругой среды через потенциалы Ламе

$$\mathbf{u} = \text{grad } \varphi_1 + \text{rot } \Psi. \quad (5)$$

Потенциал  $\Psi$  можно представить в виде [7]

$$\Psi = \varphi_2 \mathbf{e}_\eta + \text{rot}(\varphi_3 \mathbf{e}_\eta),$$

где  $\mathbf{e}_\eta$  - орт оси  $\eta$ .

С учётом этого, (5) примет вид

$$\mathbf{u} = \text{grad div } \varphi_1 + \text{rot}(\varphi_2 \mathbf{e}_\eta) + \text{rot rot}(\varphi_3 \mathbf{e}_\eta) \quad (6)$$

(2) и (6) следует, что потенциалы  $\varphi_j$  удовлетворяют видоизменённым волновым уравнениям

$$\nabla^2 \varphi_j = M_j^2 \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \eta^2}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Здесь  $M_1 = M_p$ ,  $M_2 = M_3 = M_s$ .

Выразим компоненты напряжённо-деформированного состояния (НДС) среды через потенциалы  $\varphi_j$ . Компоненты вектора  $\mathbf{u}$  (6) в цилиндрической (8) и декартовой (9) систем координат [3]:

$$u_r = \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \eta \partial r},$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \eta \partial \theta}, \quad (8)$$

$$u_\eta = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} + m_s^2 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \eta^2};$$

$$u_x = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial \eta},$$

$$u_y = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y \partial \eta}, \quad (9)$$

$$u_\eta = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} + m_s^2 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \eta^2},$$

где  $m_s^2 = 1 - M_s^2$ . Объёмная деформация

$$\varepsilon = \text{div } \mathbf{u} = \nabla^2 \varphi_1. \quad (10)$$

Используя закон Гука, с учётом (8), (9) находим выражения для компонент тензора напряжений в цилиндрических (11) и декартовых (12) координатах

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda M_p^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta^2} + \frac{2\mu}{r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial \theta^2 \partial \eta} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial r \partial \eta} \right),$$

$$\sigma_{rr} = \lambda M_p^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta^2} + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} + \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial r^2 \partial \eta} \right),$$

$$\sigma_{r\eta} = \mu \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \theta \partial \eta} + (1 + m_s^2) \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial \eta^2 \partial r} \right), \quad (11)$$

$$\sigma_{\eta\theta} = \mu \left( \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \theta \partial \eta} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial \eta} + \frac{(1 + m_s^2)}{r} \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial \theta \partial \eta^2} \right),$$

$$\sigma_{r\theta} = 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r^2} - \frac{m_s^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial r \partial \eta \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \eta \partial \theta} \right),$$

$$\sigma_{\eta\eta} = (2\mu + \lambda M_p^2) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta^2} + 2\mu m_s^2 \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial \eta^3},$$

$$\sigma_{yy} = \lambda M_p^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta^2} + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial y^2 \partial \eta} \right),$$

$$\sigma_{xx} = \lambda M_p^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta^2} + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial x^2 \partial \eta} \right),$$

$$\sigma_{x\eta} = \mu \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta \partial x} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y \partial \eta} + (1 + m_s^2) \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial \eta^2 \partial x} \right), \quad (12)$$

$$\sigma_{xy} = 2\mu \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \frac{m_s^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial x \partial y \partial \eta} \right).$$

Таким образом, для определения компонент напряжённо-деформированного состояния среды необходимо решить уравнения (7) совместно с граничными условиями (3) и (4).

### Задачи действие подвижных нагрузок на неподкреплённый тоннель

В теоретическом аспекте решение основывалось на работах [12,13]. В [11] методом разложения потенциалов, на плоские волны решены первая и вторая краевые задачи теории упругости, для полуплоскости с сосредоточенным внутри неё точечным источником стационарных волн потенциалы которого представлен через цилиндрические функции. А в [12], с использованием такого подхода, решена задача о стационарной нагрузке на контуре кругового отверстия в полупространстве. Используя идею этих работ о суперпозиции решений и переразложении плоских волн в ряды по цилиндрическим



функциям, в [13] получено, в отличие точное аналитическое решение для дозвукового случая, когда скорость движущейся нагрузки меньше скорости волн Релея.

**Постановка задачи для кругового тоннеля.**

Используя для исследований модельный подход, представим тоннель как бесконечно длинную круговую цилиндрическую полость радиусом  $r=R$ , расположенную в линейно-вязкоупругом, однородном и изотропном полупространстве  $x \leq h$  (рисунок 1) параллельно его горизонтальной границе (земной поверхности). Определим нагрузки  $P$  реакцию полупространства на движущуюся с постоянной дозвуковой скоростью  $s$  по поверхности полости в направлении оси  $Z$ .

Так как рассматривается установившийся процесс, то картина деформаций стационарна по отношению к движущейся нагрузке. Поэтому удобно перейти к подвижной системе координат  $\eta = z - ct$ , связанной с нагрузкой  $P$ .

Тогда уравнение (1) переписывается в виде

$$\left(\frac{1}{M_p^2} - \frac{1}{M_s^2}\right) \text{grad div } \mathbf{u} + \frac{1}{M_s^2} \nabla^2 \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \eta^2}$$

Здесь  $M_p = c/c_p$ ,  $M_s = c/c_s$  - числа Маха;  $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ ,  $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$  - комплексные скорости распространения волн расширения - сжатия и сдвига в среде.

При действии нагрузки на поверхность полости, имеем

$$\sigma_{rj}|_{r=R} = P_j(\theta, \eta), \quad j = r, \theta, \eta, \quad (13)$$

где  $\sigma_{rj}$  - компоненты тензора напряжений в среде,  $P_j(\theta, \eta)$  - составляющие интенсивности подвижной нагрузки  $P(\theta, \eta)$ . Так как граница полупространства свободна от нагрузок, то при  $x = h$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{x\eta} = 0. \quad (14)$$

Преобразуем уравнение (1), выразив вектор смещения упругой среды через потенциалы Ламе

$$\mathbf{u} = \text{grad } \varphi_1 + \text{rot } \Psi. \quad (15)$$

Потенциал  $\Psi$  можно представить в виде [7]

$$\Psi = \varphi_2 \mathbf{e}_\eta + \text{rot}(\varphi_3 \mathbf{e}_\eta),$$

где  $\mathbf{e}_\eta$  - орт оси  $\eta$ .

С учётом этого, (5) примет вид

$$\mathbf{u} = \text{grad div } \varphi_1 + \text{rot}(\varphi_2 \mathbf{e}_\eta) + \text{rot rot}(\varphi_3 \mathbf{e}_\eta). \quad (16)$$

Из (15) и (16) следует, что потенциалы  $\varphi_j$  удовлетворяют видоизменённым волновым уравнениям

$$\nabla^2 \varphi_j = M_j^2 \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \eta^2}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (17)$$

Здесь  $M_1 = M_p$ ,  $M_2 = M_3 = M_s$ .

Выразим компоненты напряжённо-деформированного состояния (НДС) среды через потенциалы  $\varphi_j$ . Компоненты вектора  $\mathbf{u}$  (15) в

цилиндрической (16) и декартовой (17) систем координат [14]:

$$u_r = \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \eta \partial r},$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \eta \partial \theta}, \quad (18)$$

$$u_\eta = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} + m_s^2 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \eta^2}; \quad u_x = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial \eta},$$

$$u_y = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y \partial \eta}, \quad u_\eta = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} + m_s^2 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \eta^2},$$

где  $m_s^2 = 1 - M_s^2$ . Объёмная деформация

$$\varepsilon = \text{div } \mathbf{u} = \nabla^2 \varphi_1. \quad (19)$$

Используя закон Гука, с учётом (17), (18) находим выражения для компонент тензора напряжений в цилиндрических и декартовых координатах.

$$\sigma_{\eta\eta} = (2\mu + \lambda M_p^2) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta^2} + 2\mu m_s^2 \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial \eta^3},$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda M_p^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta^2} + \frac{2\mu}{r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial \theta^2 \partial \eta} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial r \partial \eta} \right),$$

$$\sigma_{rr} = \lambda M_p^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta^2} + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} + \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial r^2 \partial \eta} \right),$$

$$\sigma_{r\eta} = \mu \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \theta \partial \eta} + (1 + m_s^2) \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial \eta^2 \partial r} \right), \quad (20)$$

$$\sigma_{\eta\theta} = \mu \left( \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \theta \partial \eta} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial \eta} + \frac{(1 + m_s^2)}{r} \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial \theta \partial \eta^2} \right),$$

$$\sigma_{r\theta} = 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r^2} - \frac{m_s^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial r \partial \eta \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \eta \partial \theta} \right);$$

$$\sigma_{\eta\eta} = (2\mu + \lambda M_p^2) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta^2} + 2\mu m_s^2 \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial \eta^3},$$

$$\sigma_{yy} = \lambda M_p^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta^2} + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial y^2 \partial \eta} \right),$$

$$\sigma_{xx} = \lambda M_p^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta^2} + 2\mu \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial x^2 \partial \eta} \right),$$

$$\sigma_{x\eta} = \mu \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \eta \partial x} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y \partial \eta} + (1 + m_s^2) \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial \eta^2 \partial x} \right),$$

$$\sigma_{\eta y} = \mu \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial \eta} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial \eta} + (1 + m_s^2) \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial y \partial \eta^2} \right),$$

$$\sigma_{xy} = 2\mu \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \frac{m_s^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial x \partial y \partial \eta} \right).$$

Таким образом, для определения компонент напряжённого - деформированного состояния среды необходимо решить уравнения (17) совместно с граничными условиями. Применим в подвижной системе координат к уравнениям движения и граничным условиям комплексное преобразование Фурье вида [13]

$$\bar{\varphi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\eta) e^{-i\xi\eta} d\eta, \quad (21)$$

$$\varphi(\eta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\xi) e^{i\xi\eta} d\xi$$

Записывая общие решения преобразованных уравнений движения тоннеля в виде (12)-(21) находим следующую систему алгебраических уравнений для определения безразмерных трансформант перемещений срединной поверхности

$$-\xi^2 U_0 + i\xi G_1 w_0 = -\xi^2 \frac{1-G_1}{3} G_0^2 U_0; \quad (22)$$



где  $G_1 = G_2 / G_1$ ;  $k = h / a$ ;  $P_0 = P_0 a / Eh$ ;

$$\{U_0, W_0\} = \frac{1}{h} \{U_1, W_1\}; C_0^2 = C \left( \frac{3 \rho_1}{2 G_1} \right);$$

Напряжение на границе мягкого слоя и упругой среды ( $r = b$ ) в безразмерном виде имеет вид:

$$\sigma_{rr}^* = \int \frac{4}{\pi} \left\{ -\frac{(1-\eta)H_1^{(1)}(\bar{\alpha}a)}{\delta_1} \sin \theta + \sum \frac{i^{n+1}H_n(\bar{\alpha}a)}{\Delta n} \sin n\theta \right\} e^{i\eta} d\xi$$

$$\sigma_{r\theta}^* = \int \frac{2}{\pi} \left\{ -\frac{i\bar{\beta}a^2}{\bar{\beta}^3 a^3 H_1^{(1)}(\bar{\beta}a) + 8\eta \left( \frac{\bar{\beta}^2 a^2}{2} H_0^{(1)}(\bar{\beta}a) - \bar{\beta}a H_1(\bar{\beta}a) \right)} - \frac{2}{\delta_1} [(1+\eta)H_1(\bar{\alpha}a) - \bar{\alpha}a H_0(\bar{\alpha}a) \cos \theta] - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^{n+1} [-nH_n^{(1)}(\bar{\alpha}a) + (\bar{\alpha}a)H_{n-1}(\bar{\alpha}a)]}{\Delta n} \cos n\theta \right\} e^{i\eta}$$

Здесь  $\delta = \rho/\rho_e$  представляет собой отношение плотности окружающей среды на плотность мягкого слоя;  $\alpha, \beta$  - является функциями  $\xi$  и  $\eta$ . Находим следующее выражение для трансформанты нагрузки, которая передается на оболочку со стороны мягкого слоя

$$\bar{q}_{re} = -G_1 \frac{\xi}{q} C_1 w_0 - C_2 P_0(\xi);$$

$$C_1 = \sum_{j=1}^4 \frac{A_{4j}|_{k_{c1}=0} B_{3j}}{\det \|A_{ke}\|}; C_2 = \sum_{j=1}^4 \frac{(-1)^j A_{4j}|_{k_{c1}=0} B_{3j}}{\det \|A_{ke}\|}.$$

Элементы определителя  $\det \|A_{ke}\|$  вычисляется то

$$A_{11} = -2M_1; A_{12} = -a_{11}; A_{13} = nM_{12}; A_{14} = -A_{13};$$

$$A_{21} = -S_1 A_{11}; A_{22} = A_{12} * k_0(z_1) / k_1(z_1);$$

$$A_{23} = A_{13} * I_0(z_2) / I_2(z_2); A_{24} = A_{13} * k_0(z_1) / k_1(z_2); A_{31} = \frac{1}{2} A_{11};$$

$$A_{32} = -\frac{1}{2} A_{11}; A_{41} = n_1 k_0(z_3) / k_1(z_4) - 2A_{21} / (z_3 / M_2); A_{31} = A_{13} / n_1;$$

$$A_{34} = -A_{13} / n_1;$$

$$A_{42} = n_1 I_0(z_3) / I_1(z_4) - 2M_1 S_1(z_3) / I_1(z_4);$$

$$A_{43} = -2M_{12}^2 (k_0(z_5) / k_1(z_6) + I_1(z_5) / I_1(z_6) / (z_6 / M_2));$$

$$A_{44} = -2M_{12}^2 (I_0(z_5) / k_1(z_6) + I_1(z_6) / k_1(z_6) / (z_6 / M_2));$$

где  $m_1 = \sqrt{1-M_p^2}$ ;  $m_{12} = \sqrt{1-M_s^2}$ ;

$$z_1 = M_1 \eta; z_2 = M_{12} \eta; z_3 = M_1 \eta;$$

$$z_4 = m_1 \eta (1 + k_{11}); z_5 = m_1 \eta; k_{11} = (b-a) / a;$$

$k_{10}, k_{11}$  - модифицированные функции Неймана;

$I_{10}, I_{11}$  - модифицированные функции Бесселя;

Решение уравнений движений окружающей среды имеет вид ( $C_f < C_s < C_p$ )

$$\varphi(r, \xi) = A_n(\xi) k_n(m_1 \xi r) + B_n(\xi) I_4(m_1 \xi r)$$

$$\psi(r, \xi) = C_n(\xi) k_n(m_{12} \xi r) + D_n(\xi) I_4(m_{12} \xi r) \quad (23)$$

Выражение для трансформанты нормального перемещения имеет вид

$$w_0 = -\frac{1-\nu}{m} \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_1 [a \cos(\zeta \eta) - \zeta \lim(\zeta \eta)] d\zeta}{[a^2 + \zeta^2] \det \|A_{ke}\|} \right\} \quad (24)$$

Определим  $\Delta_j$  ( $j = 1.2.....5$ ) получается из

$\det \|A_{ke}\|$  заменой  $j=20$  столбцом  $C$  элементами  $\{0;$

$0; 1; 0; 0\}$ . После этого функции  $A(\xi).....D(\xi)$  из (23) могут быть вычислены по формулам

$$\{A, B, C, D\} = \frac{a^2}{\xi^2 \det \|A_{ke}\|} \left\{ \frac{A_1^1}{k_1(m_1 \xi)}; -\frac{A_2^1}{I_1(m_2 \xi)}; -i \frac{a A_3^1}{\zeta k_1(m_{12} \xi)}; i \frac{a A_4^1}{\zeta I_1(m_{12} \xi)} \right\}$$

$$A_j^1 = \frac{\xi}{a} M_{3k} w_0 + P_0 |m_{4k}| G_1 (\kappa = 1, \dots, 4)$$

$m_{ie}$  - миноры элемента  $A_{je}$ . Для конкретного значения скорости движения нагрузки. С знаменатели под интегральных выражений в формулах (21) являются трансцендентными функциями относительно  $\xi$  с действительными коэффициентами, зависящими от  $C$ , а также от механических параметры оболочки и слоя.

Анализ интегралов обращения необходимо начинать с  $D(\xi, C_0) = 0$ , что эквивалентно построению дисперсионной зависимости в соответствующей задаче о распространении свободных волн и нахождению из дисперсионных кривых корней знаменателе для выбранной скорости движения нагрузки. С при  $C < C_5$ . На рисунок 2 изображено изменение перемещений заполнителя в зависимости толщине тел при различных значениях жесткости. Как видно из рисунок ( $\gamma = 100, 50, 10, 2$ ) что для достаточно жесткого слоя ( $\gamma = 100$ ) прогибы оболочки существенно снижается  $W$ .

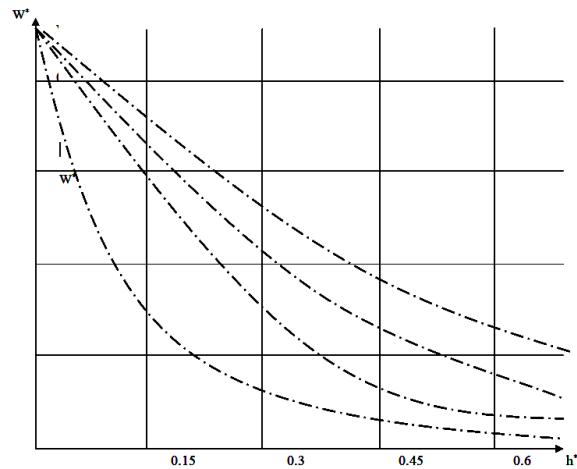


Рисунок 2. Прогибы оболочки в зависимости от толщине.

1. Для заданной скорости  $C$  имеется один или два различных корня знаменателя. 2. Для некоторых значение.  $C$  знаменатель имеет двойной корень. Этот случай отвечает минимум соответствующей дисперсионной кривой на рис.2. Такая скорость движения называется резонансной и обозначается  $C^x$ . Появляется резонансный эффект, или которой прогибы и контактной давления стремятся к бесконечности.

2. Для данного значения  $C$  знаменатель не имеет корней на действительной оси как видно из рис. 2, это будет или,  $C < C_\phi$  (до резонансный режим). При такой скорости движения интегралы обращения не являются особыми и могут быть



найденны эффективными численными методами. Разделив интеграл (21) на два слагаемых

$$w_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_1} x_1(\Omega) d\Omega$$

или

$$w_0 = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} x_1(\Omega) d\Omega \quad (25)$$

Величину интеграла (25) найдена численно, с помощью метода Ромберга [2]. При вычислении интеграла по методу Ромберга, приходится многократно вычислять подинтегральную функцию. Обратное преобразование Фурье (25) выполнялась численно. Показано, что при длине шага интегрирование 1,01 погрешность процедуры не превышает 0,3 - 0,5 %

#### Выводы.

1. Для описания поведения вязкоупругих материалов с нестабильными свойствами, не условливается принципу температурно - временной аналогии, предложено не разностное сингулярное ядро наследственности.

2. Предложено универсальный алгоритм для решений поставленных задач.

#### Литературы:

1. Вольмир А.С. Гибкие пластины и оболочки. М., 1956.
2. Сафаров И.И. Колебания и волны в диссипативно неодородных средах и конструкциях. - Ташкент. Фан, 1992. -250с.
3. Safarov I.I., Teshayev M.K., Boltayev Z.I., Akhmedov M.Sh. Damping Properties of Vibrations of Three-Layer Viscoelastic Plate. International Journal of Theoretical and Applied Mathematics 2017; 3(6): 191-198
4. Safarov I.I., Boltayev Z.I., Akhmedov M.Sh., 3 Buronov S.A. O distribution of own waves in elastic and viscoelastic environments and constructions. Caribbean Journal of Science and Technology. 2017, Vol.5, 065-087 ISSN 0799-3757 <http://caribjscitech.com>
5. Safarov I.I., Akhmedov M. Sh., Rajabov O. About the natural oscillations viscoelastic torpidly Shell with the Flowing Fluid. World Wide Journal of Multidisciplinary Research and Development (WWJMRD).2017,3(7). P.295-309
6. Safarov I.I., Марасулов А.М., Сарсенов Б.Т. Сопоставление частот собственного колебания упругого криволинейного стержня, взаимодействующих с вязкой жидкостью. Наука и жизнь Казахстана №3/2(47),2017. ISSN 2073-333X. С.144-148
7. Safarov I.I., Тешаев М.Х.Отажонова Н.Б. О поверхностных волнах на вязкоупругом цилиндрическом диске. Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. Пермь, 2017. Вып.2(37). С.53-59
8. Safarov I.I., Тешаев М.Х., Болтаев З.И. О распространении собственных волн в

диссипативных слоистых цилиндрических телах. Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. Пермь, 2017. Вып.1(36). С.33-40

9. Safarov I.I., Teshayev M. X. Akhmedov M. Sh.,Boltaev Z.I. Distribution Free Waves in Viscoelastic Wedge with and Arbitrary Angle Tops// Applied Mathematics, 2017, 8. <http://www.scirp.org/journal/am> P.736-745

10. Safarov I.I., Teshayev M. X. Akhmedov M. Sh., Ruziyev T.R Application Of The Method Of Finite Element For Investigation Of The Dynamic Stress-deformed Condition Of Pipeline Sides When Exposed External Loads. // Case Studies Journal ISSN (2305-509X)-Volume 6, Issue-5-May-2017. P.38-45

11. Базаров М.Б. Сафаров И.И., Шокин Ю.М. Численное моделирование колебаний диссипативно-неодородных и однородных механических систем. -Новосибирск, Сибирское отделение РАН, 1996. -189 с.

12.Сафаров И.И.,Ахмедов М.Ш., Болтаев З.И.Колебания и дифракция волн на цилиндрическом теле в вязкоупругой среде. Lambert Academic Publishing . 2016. 262p.

13. Safarov I.I., Teshayev M. X. Akhmedov M. Sh., Ruziyev T.R. Application of the Method of Finite Element for Investigation of the Dynamic Stress-deformed Condition Of Pipeline Sides When Exposed External Loads. // Case Studies Journal ISSN (2305-509X)-Volume 6, Issue-5-May-2017. P.38-45

14. Safarov I.I., Тешаев М.Х., Отажонова Н.Б. О поверхностных волнах на вязкоупругом цилиндрическом диске. Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. Пермь, 2017. Вып.2(37). С.53-59