



TARMOQLARDA PT-SIMMETRIK SOLITONLAR: METRIK GRAFIKGA ASOSLANGAN YONDASHUV

Feruza Xashimova ¹[0009-0003-7530-229X], **Akramov Mashrab** ²[0000-0003-1819-3704]

¹Navoiy davlat konchilik va texnologiyalar universiteti, Fizika kafedrası katta o'qituvchisi,
E_mail: feruza_x71@mail.ru

²Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekistan Milliy universiteti, Fizika kafedrası dotsenti, PhD.
E_mail: mashrabresearcher@gmail.com

Annotatsiya. Biz PT-simmetrik turgan solitonlarni tasdiqlovchi tarmoqlar uchun modelni taklif qilamiz. Model har bir bog'lanishda aniqlangan murakkab PT-simmetrik potentsialga ega metrik grafiklarda chiziqli bo'lmagan Shredinger tenglamasi nuqtai nazaridan tasvirlangan. Masalaning aniq soliton yechimlari olinadi. Yulduzli grafikda PT-simmetrik turgan solitonlarning barqarorlik tahlili o'rganiladi. Boshqa grafik topologiyalarining kengayishi metrik daraxt grafigini ko'rib chiqish orqali ko'rsatiladi.

Kalit so'zlar: Grafiklardagi PT-simmetrik solitonlar, murakkab PT-simmetrik potentsial, chiziqli barqarorlik.

Abstract. We propose a model for networks approving PT-symmetric standing solitons. The model is described in terms of the nonlinear Schrödinger equation on metric graphs, with complex PT-symmetric potential given on each bond. Exact soliton solutions of the problem are obtained. The stability analysis of the PT-symmetric standing solitons on the star graph is studied. Extension for other graph topologies is demonstrated by considering a metric tree graph.

Keywords: PT-symmetric solitons on graphs, complex PT-symmetric potential, linear stability.

Аннотация. Мы предлагаем модель для сетей, подтверждающих PT-симметричные стоячие солитоны. Модель описывается в терминах нелинейного уравнения Шредингера на метрических графах с комплексным PT-симметричным потенциалом, заданным на каждой связи.

Получены точные солитонные решения задачи. Изучен анализ устойчивости PT-симметричных стоячих солитонов на звездном графе. Продемонстрировано расширение для других топологий графа путем рассмотрения метрического древовидного графа.

Ключевые слова: PT-симметричные солитоны на графиках, комплексный PT-симметричный потенциал, линейная устойчивость.

Kirish

Paritet-vaqt (PT)-simmetrik tizimlar so'nggi yigirma yil ichida fizikada katta e'tiborni tortdi. PT-simmetrik tizimlarga bo'lgan qiziqish Bender va Boetcherning maqolalari tomonidan boshlangan [1]. PT-simmetrik kvant fizikasining turli jihatlarini o'rganishda sezilarli yutuqlarga erishilganiga qaramay, PT-simmetrik kvant tizimlarini eksperimental amalga oshirish hali amalga oshirilmagan. Hozircha PT-simmetrik tizimlarni eksperimental ravishda amalga oshirishning yagona imkoniyati bu optik materiallar yordamida amalga oshiriladi. Bunday materiallarda yorug'likning tarqalishi Helmgolts tenglamasi [2-6] nuqtai nazaridan tavsiflanganligi sababli kvant hodisalarini taqlid qilishi mumkin. Biroq, geometrik optik tizimlarni kvant deb hisoblash mumkin emas. Shuni ta'kidlash kerakki, nafaqat evolyutsiyasi chiziqli bo'lgan kvant tizimlar, balki chiziqli bo'lmagan ba'zi klassik tizimlar ham PT-simmetrik bo'lishi mumkin. Bular, masalan, PT-simmetrik kompleks potentsialli chiziqli bo'lmagan Shredinger tenglamasi (NLS) nuqtai nazaridan tasvirlangan optik tizimlardir. Bunday tizimlar so'nggi o'n yillikda adabiyotlarda ham keng o'rganildi [7-27]. Bunday PT-simmetrik kompleks potentsiallar odatda vaqtdan mustaqil bo'lganligi sababli, NLS tenglamasidagi vaqt va koordinata o'zgaruvchilari faktorlarga ajratilishi mumkin va muammo doimiy to'lqinlarning tavsifiga tushiriladi. Ushbu maqolada biz PT-simmetrik NLS



tenglamasini metrik grafiklar holatiga kengaytirishni ko'rib chiqamiz. Ya'ni, NLS tenglamasini metrik grafiklarda PT-simmetrik kompleks potentsial bilan yechamiz. Ikkinchisi grafik topologiyasi deb ataladigan ma'lum bir qoidaga muvofiq bir-biriga bog'langan simlar (tarmoqlar) tizimidir. Bunday sohalarida evolyutsiya tenglamasini yechish uchun grafikning uchlari (tugunlari) ga chegara shartlarini qo'yish kerak. Odatda bunday chegaraviy shartlar turli xil saqlanish qonunlaridan kelib chiqadi, bu ularni fizikaviy ahamiyatga ega qiladi. Grafiklardagi PT-simmetrik NLS tenglamasi tarmoqlangan optik to'lqin o'tkazgichlarda, ya'ni optik to'lqin o'tkazgichlar tarmoqlarida PT-simmetrik solitonlar uchun modelni tavsiflaydi. Ushbu maqola quyidagicha tashkil etilgan: keyingi bo'limda biz PT-simmetrik chiziqli solitonlarning tavsifini qisqacha eslaymiz. 2-bo'lim yulduz grafigi misolida muammoning kengaytmasini taqdim etadi. 3-bo'limda yulduz grafigida PT-simmetrik solitonning barqarorligini, 4-bo'limda esa daraxt grafigi uchun masalani shakllantirishni ko'rib chiqamiz. Nihoyat, xulosada ba'zi yakuniy fikrlar keltirilgan.

Asosiy qism

1. Chiziqdagi PT-simmetrik solitonlar

Bu yerda [13] dan keyin biz chiziqdagi muammomizning analogini qisqacha eslaymiz va chiziqdagi PT-simmetrik potentsialga ega NLS tenglamasining qisqacha tavsifini beramiz. Ushbu chiziqli bo'lmagan Shredinger tenglamasini quyidagicha yozish mumkin:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + U(x)\psi + g(x)|\psi|^2 \psi = 0, \quad (1)$$

bu yerda $U(x) = V(x) + iW(x)$ murakkab PT-simmetrik potentsial, bunda potentsialning haqiqiy qismi juft $U(x) = V(-x)$ funksiya, mavhum qismi esa toq $W(x) = -W(-x)$ funksiyadir. Nochiziqlik koeffitsienti ham juft funksiyadir, ya'ni. $g(x) = g(-x)$. Yuqoridagi PT-simetriya shartlarini qanoatlantiruvchi potentsialning aniq shakli quyidagicha yozilishi mumkin

$$U(x) = V_0 \sec^2 h(x), \quad W(x) = W_0 \tanh(x) \sec h(x). \quad (2)$$

O'zgaruvchilarni ajratish ko'rinishida yechim izlash $\psi(x, t) = e^{i\epsilon t} \phi(x)$ va nochiziqlik koeffitsientini doimiy $g(x) = 1$ sifatida tanlash quyidagi yechimga olib keladi [13].

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{W_0^2}{9} - V_0 + 2 \sec h(x) \exp\left[\frac{iW_0}{3} \tan^{-1}(\sinh(x))\right]}, \quad (3)$$

bu yerda $V_0 < W_0^2/9 + 2$ va $\epsilon = 1$. NLS tenglamasining aniq (tik) soliton yechimlarini tasdiqlovchi turli kompleks PT-simmetrik potentsiallar [13] da keltirilgan.

2. Yulduz shaklidagi tarmoqlarda PT-simmetrik solitonlar

So'nggi yigirma yil ichida metrik grafiklar deb ataladigan tarmoqlangan domenlar va tarmoqlardagi evolyutsiya tenglamalari va soliton dinamikasi katta e'tiborni tortdi [28–41]. Bunday tarmoqlangan domenlar muammoni metrik grafiklarda evolyutsiya tenglamalariga olib keladigan metrik grafiklar deb ataladigan nuqtai nazardan modellashirilishi mumkin. Murakkab PT-simmetrik potentsialga ega bo'lgan NLS tenglamasini grafiklar deb ataladigan kvazi bir o'lchovli tarmoqlangan domenlarda ham ko'rib chiqish mumkin. Bular bir-biriga qoida bo'yicha ulangan simlar to'plami bo'lib, ular grafik topologiyasi deb ataladi. Agar simlar (bog'lar) a (cheklangan yoki yarim cheksiz uzunlik) tayinlangan bo'lsa, ular metrik grafiklar deb ataladi.

Uchta $b_j (j=1,2,3)$ bog'lanishli Y-birikmasi (asosiy yulduz grafiglari) ko'rinishidagi eng oddiy metrik grafikni ko'rib chiqaylik (1-rasmga qarang). Har bir bog'lanishda koordinata belgilanadi.

Koordinatalarning yuqori qismida boshlang'ichni tanlab, b_1 bog'lanish uchun 0 ni qo'yamiz $x_1 \in (-\infty, 0)$ va $b_{2,3}$ uchun $x_{2,3} \in (+\infty, 0)$ ni tuzatamiz. Quyida biz ψ_j o'rniga $\psi_j(x_j)$ qisqartmasidan foydalanamiz, bu yerda x - ψ_j komponenti tegishli j -chi zvenodagi koordinata. Keyin murakkab PT-simmetrik potentsialga ega bo'lgan NLS tenglamasi har bir grafik havolada sifatida yozilishi mumkin:

$$i \frac{\partial \psi_j}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x^2} + U_j(x) \psi_j + g_j |\psi_j|^2 \psi_j = 0 \quad (4)$$

bu yerda $j = 1, 2, 3$ bo'lanish indeksi, $g_j(x) = g_j = \text{const}$ esa bo'lanish doimiysi, va PT-simmetrik potentsialning haqiqiy va mavhum qismlari $U_j(x) = V_j(x) + iW_j(x)$ quyidagicha aniqlanadi.

$$V_j(x) = V_{0j} \sec h^2(x), \quad W_j(x) = W_{0j} \tanh(x) \sec h(x). \quad (5)$$

Potentsialning haqiqiy va mavhum qismlarining grafiklari 2-rasmda keltirilgan. Metrik grafiklarda evolyutsiya tenglamasini yechish uchun ko'pincha "yopishtiruvchi" shartlar deb ataladigan tarmoq nuqtasida (kordinata uchida) chegara shartlarini qo'yish kerak. (4)-tenglama uchun kordinata uchining chegara shartlarini masshtablarning uzluksizligi sifatida yechimini yozish mumkin

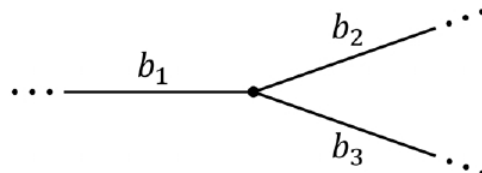
$$\alpha_1 \psi_1|_{x=0} = \alpha_2 \psi_2|_{x=0} = \alpha_3 \psi_3|_{x=0}, \quad (6)$$

bu yerda α_j (haqiqiy) massa koeffitsientlari, va umumiy Kirxgof qoidasi:

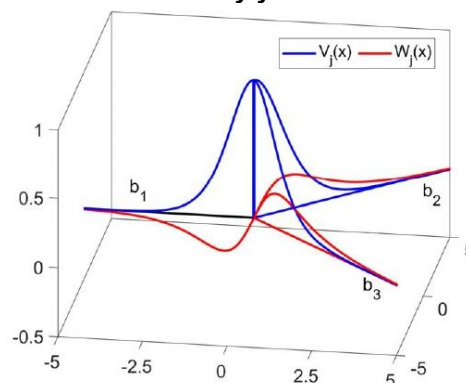
$$\frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \Big|_{x=0} + \frac{1}{\alpha_3} \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \Big|_{x=0}. \quad (7)$$

(4) tenglamadagi o'zgaruvchilarni $\psi_j(x, t) = e^{i\epsilon t} \phi_j(x)$ koeffitsientiga ajratish mumkin. Biz quyidagi statsionar PT-simmetrik NLS tenglamasini olamiz:

$$\epsilon \phi_j = \frac{d^2 \phi_j}{dx^2} + U_j(x) \phi_j + g_j |\phi_j|^2 \phi_j, \quad (8)$$



1-rasm. Asosiy yulduzlar soni.



2-rasm. Haqiqiy va mavhum qismlar uchun PT-simmetrik potentsial $V_{0j} = 1$ va yulduz grafigida $W_{0j} = 0, 5$, $j = 1, 2, 3$ va (6) va (7) dagi kabi bir xil cho'qqi chegarasi shartlari

$$\text{qo'llaniladi } \phi_j: \alpha_1 \phi_1|_{x=0} = \alpha_2 \phi_2|_{x=0} = \alpha_3 \phi_3|_{x=0},$$

$$\frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \Big|_{x=0} + \frac{1}{\alpha_3} \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \Big|_{x=0}. \quad (8)$$

Metrik grafikda evolyutsiya tenglamasining yechimini topishning samarali usuli [28, 29] NLS tenglamasini grafiklarda yechish uchun taklif qilingan. Keyinchalik bu usul boshqa evolyutsiya tenglamalari uchun ham kengaytirildi [30-39].

Ushbu yondashuvdan so'ng, (3) tenglama bilan berilgan to'g'ri chiziqdagi masalani yechish cho'qqilarning chegaraviy shartlarini (9) qanoatlantirishni talab qilamiz.

Agar aj va gj parametrlari quyidagi cheklovlarni qonatlantirsa, buni amalga oshirish mumkinligini tushunish oson:

$$\frac{\alpha_j}{\alpha_1} = \sqrt{\frac{g_j}{g_1}} \quad \text{va} \quad \frac{1}{g_1} = \frac{1}{g_2} + \frac{1}{g_3}. \quad (10)$$

U holda (8) va (9) tenglamalar bilan berilgan NLS tenglamasining grafikdagi yechimini ($\epsilon=1$) shaklida yozish mumkin.

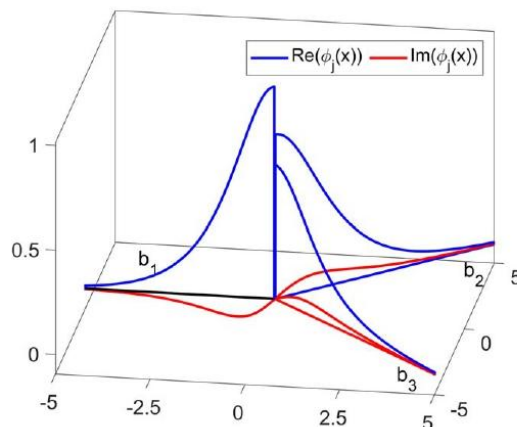
$$\phi_j(x) = \sqrt{\frac{1}{g_1} \left(\frac{W_{0j}^2}{9} - V_{0j} + 2 \sec h(x) \exp \left[\frac{iW_{0j}}{3} \tan^{-1}(\sinh(x)) \right] \right)}. \quad (11)$$

bu yerda parametrlar uchun (10) tenglama olinganligini ta'kidlaymiz

$$V_{01} = V_{02} = V_{03} \quad \text{va} \quad W_{01} = W_{02} = W_{03},$$

Yulduzli grafikdagi bir xil cho'qqi chegarasi shartlari saqlash qoidasi [42] quyidagicha o'qiladi

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^3 \int_{b_j} |\psi_j(x,t)|^2 dx = 0. \quad (12)$$



3-rasm.

(10) tenglamadagi yig'indi qoidasi $g_1=1, g_2=5/3$ va $g_3=5/2$ nochiziqlilik koeffitsientlari uchun bajarilgan holat uchun yulduz grafi bo'yicha (11) tenglamadagi solitonning analitik yechimining grafi. PT-simmetrik potentsialning haqiqiy $V_{0j}=1$ va $W_{0j}=0,5$ tasavvur qismining chuqurligi barcha ulanishlar uchun bir xil. (5) bilan (4) tenglamalardan foydalanib quyidagicha ifodalash mumkin

$$J - \sum_{j=1}^3 W_{0j} \int_{b_j} \tanh(x) \sec h(x) |\psi_j|^2 dx = 0 \quad (13)$$

bu yerda tok oqimi J sifatida aniqlanadi

$$J = \sum_{j=1}^3 \text{Im} \left(\psi_j \frac{\partial \psi_j^*}{\partial x} \right) \Big|_{b_j}. \quad (14)$$

Yuqoridagi tenglama (11) tenglamada tik turgan soliton yechimi va (6) va (7) tenglamalardagi uchlarning chegaraviy shartlarini bilan qanoatlantiriladi.



(11) tenglamadagi yechimni (13) tenglamaga almashtirib, $W_{0j} = W_0$ va $V_{0j} = V_0$ uchun W_0 ga nisbatan tok va uning hosilasini quyidagicha yozamiz.

$$J = \frac{W_0}{3} \left(\frac{W_0^2}{9} - V_0 + 2 \right) \left(-\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \frac{1}{g_3} \right), \quad (15)$$

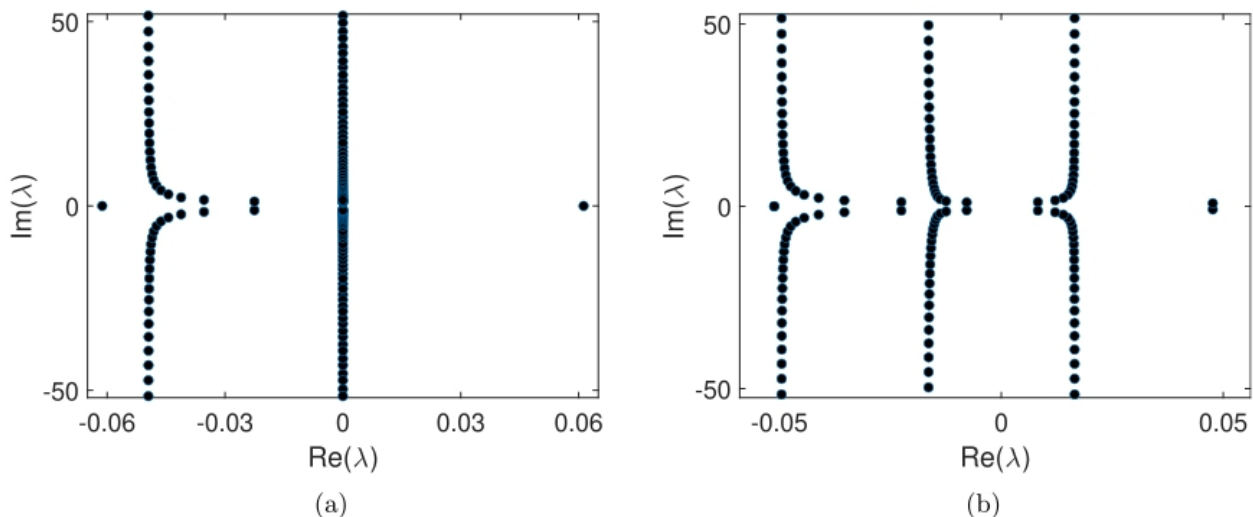
$$\frac{\partial J}{\partial W} = \frac{1}{3} \left(\frac{W_0^2}{3} - V_0 + 2 \right) \left(-\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \frac{1}{g_3} \right). \quad (16)$$

(16) tenglamadan ko'rinib turibdiki, (10) tenglamadagi yig'indisi qoidasi bajarilgan holatda tok har doim nolga teng. Yig'indi qoidasi buzilgan taqdirda V_0 va g_j qiymatlariga qarab anomaliyasi $\frac{\partial J}{\partial W_0} < 0$ [42] paydo bo'lishi mumkin. (8) tenglamaning soliton yechimlari grafiklari (10) tenglamadagi cheklovlar bajarilgan holat uchun 3-rasmda keltirilgan.

Ko'rinib turibdiki, yuqoridagi tadqiqot ixtiyoriy miqdordagi bog'lanishlar bilan metrik yulduz grafigiga kengaytirilishi mumkin.

3. Yulduzli grafikdagi PT-simmetrik solitonlarning barqarorligi

(1) va (4) tenglamalarning soliton yechimlarini olish mumkin bo'lsada, bu yechimlarning hammasi ham barqaror emas. Vaqtga bog'liq bo'lmagan NLS tenglamasining faqat barqaror yechimlari jismoniy ahamiyatga ega. PT-simmetrik potentsialga ega NLS tenglamasining doimiy soliton yechimining barqarorligini tahlil qilishning bir necha usullari mavjud [13-15, 18, 26, 27]. Bu yerda (4), (6) va (7) tenglamalar bilan berilgan muammoning barqarorligini tahlil qilish uchun biz [43] da taklif qilingan yondashuvdan foydalanamiz.



4-rasm.

Yulduzli grafikdagi PT-simmetrik solitonlarning chiziqli barqarorlik spektri (10) yig'indisi qoidasi (a) $g_1=1$, $g_2=5/3$, $g_3=5/2$ noxiziqilik koeffitsientlari uchun bajariladi va (b) $g_j=1$, $j=1,2,3$ uchun buziladi. Qolgan parametrlar quyidagicha tanlanadi: $V_{0j}=1$, $W_{0j}=0,5$, $\varepsilon=1$.

Quyidagi [43], berilgan (4) tenglamaning uyg'ongan yechimini kiritamiz va ifoda bilan beriladi:

$$\psi_j(x, t) = e^{i\alpha t} [\phi_j(x) + v_j(x)e^{\lambda t} + w_j^*(x)e^{\lambda^* t}], \quad (17)$$

bu yerda $|\nu_j(x)|, |\omega_j(x)| \ll |\phi_j(x)|$. (17) tenglamani (4) tenglamaga qo'yib, ularni chiziqli qilib, xquyidagi bilan berilgan xos qiymat masalasini olamiz.

$$i \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ L_2 & L_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

bu yerda $\nu_j = \begin{pmatrix} \nu_j \\ \omega_j \end{pmatrix}$ va $L_j = \begin{pmatrix} -\varepsilon + \frac{d^2}{dx^2} + U_j + 2g_j|\phi_j|^2 & g_j\phi_j^2 \\ -g_j(\phi_j^2)^* & \varepsilon - \frac{d^2}{dx^2} - U_j^* - 2g_j|\phi_j|^2 \end{pmatrix}$.

Keyin yechimini barqarorlik mezonini λ xos qiymati bo'yicha shakllantirilishi mumkin: Haqiqiy mavhum λ uchun fj yechim chiziqli barqaror, aks holda chiziqli barqaror emas [43]. (6) va (7) cho'qqi chegara shartlarini bajarishni talab qilib, $\nu_i(x)$ uchun mos chegara shartlarini shaklda olamiz.

$$\alpha_1 \nu_1|_{x=0} = \alpha_2 \nu_2|_{x=0} = \alpha_3 \nu_3|_{x=0},$$

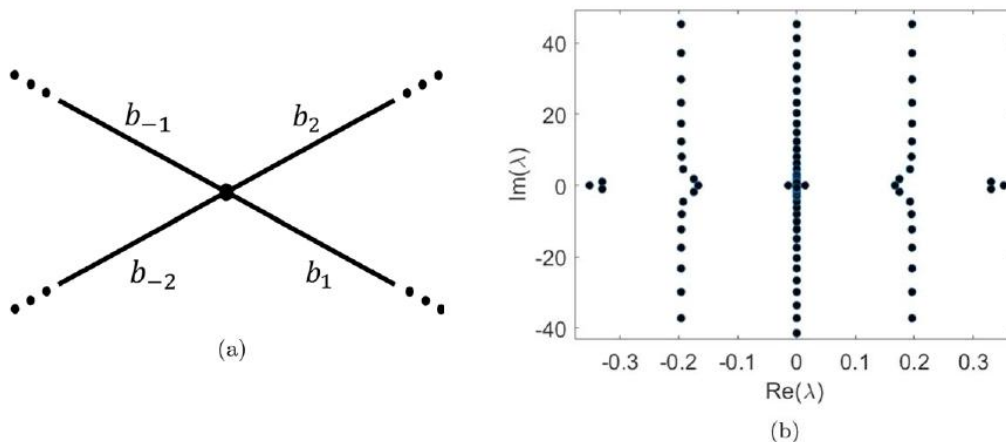
$$\frac{1}{\alpha_1} \frac{d\nu_1}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{d\nu_2}{dx} \Big|_{x=0} + \frac{1}{\alpha} \frac{d\nu_3}{dx} \Big|_{x=0}. \quad (19)$$

Biz (18) va (19) tenglamalar bilan berilgan xususiy qiymat masalasini sonli yechdik va λ xos qiymatlarni topdik. 4-rasmda (10) tenglamadagi cheklovlar bajarilgan holatlar uchun (4(a)-rasm) va parametrlari (10) tenglamani qanoatlantirmaydigan holatlar uchun λ ning mavhum va haqiqiy qismlarining grafiklari keltirilgan (4(b)-rasm). Grafiklardan ko'rinib turibdiki, faqat cheklovlar bajarilgan holat faqat mavhum qiymatga olib keladi, boshqa holatda esa l nolga teng bo'lmagan haqiqiy va mavhum qismlarga ega.

Yuqoridagilardan kelib chiqadiki, faqat α_j va g_j parametrlari (10) tenglamani qanoatlantiradigan holatga mos keladigan yechim barqarordir. 5-rasmda quyidagi yig'indi qoidasini qanoatlantiradigan g_j parametrlarining qiymatlari uchun to'rtta bog'lanishli yulduz grafigi uchun (5(a)-rasm) murakkab o'ziga xos qiymatlar spektrining o'xshash rasmi tuzilgan (5(b)-rasm):

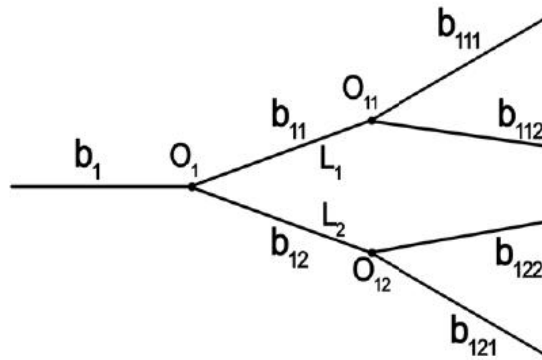
$$\frac{1}{g_{-1}} + \frac{1}{g_{-2}} = \frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2}. \quad (20)$$

$\text{Re } \lambda = 0$, chizig'iga nisbatan spektrning simmetriyasi [43] da ko'rib chiqilgan chiziqdagi NLS tenglamasi misolida aniq ko'rinadi.



5-rasm.

(a) To'rt bog'lanishli yulduz grafigi va (b) tegishli chiziqli barqarorlik spektri to'rt bog'lanishli yulduz grafigida (10) tenglamadagi yig'indisi qoidasining analogi bo'lgan taqdirda amalga oshiriladi.



6-rasm. Daraxt grafigining eskizi.

4. Daraxt grafigiga kengaytma

Metrik yulduz grafiklarida PT-simmetrik solitonlarning yuqoridagi tadqiqini ixtiyoriy grafiklarga, ya'ni ixtiyoriy tarmoqlanuvchi topologiyaga ega grafiklarga kengaytirish mumkin. Buni 6-rasmda ko'rsatilgan daraxt grafigi uchun ko'rsatamiz.

Grafik yetti bog'lanishdan iborat bo'lib, O_1 ho'qqisini boshlang'ich sifatida tanlash mumkin. U holda bog'lanishlarni $b_1 \sim (-\infty; 0]$, $b_{1m} \sim [0; L_m]$ va $b_{1m} \sim [0; +\infty)$ sifatida aniqlash mumkin, bu yerda L_m - b_{1m} va m orasidagi bog'lanish uzunligi, $n=1, 2$.

Yuqoridagi tenglama (8) har bir bog'lanish uchun daraxt grafigiga yoziladi, faqat j bog'lanish indeksi $e=\{1, 1 m, 1 mn\}$ bilan almashtiriladi. Har bir cho'qqi uchun cho'qqi chegara shartlarini quyidagicha yozish mumkin

$$\alpha_1 \phi_1 |_{x=0} = \alpha_{11} \phi_{11} |_{x=0} = \alpha_{12} \phi_{12} |_{x=0},$$

$$\frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \Big|_{x=0} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \phi_3}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad (21)$$

va

$$\alpha_{1m} \phi_{1m} |_{x=L_m} = \alpha_{1m} \phi_{1m} |_{x=0} = \alpha_{1m2} \phi_{1m2} |_{x=0},$$

$$\frac{1}{\alpha_{1m}} \frac{\partial \phi_{1m}}{\partial x} \Big|_{x=L_m} = \frac{1}{\alpha_{1m1}} \frac{\partial \phi_{1m1}}{\partial x} \Big|_{x=0} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \phi_{1m2}}{\partial x} \Big|_{x=0}. \quad (22)$$

Yuqoridagi cho'qqi chegara shartlaridan quyidagi munosabatlarni yozish mumkin

$$\frac{1}{\alpha_1^2} = \frac{1}{\alpha_{11}^2} + \frac{1}{\alpha_{12}^2} \quad \text{va} \quad \frac{1}{\alpha_{1m}^2} = \frac{1}{\alpha_{1m1}^2} + \frac{1}{\alpha_{1m2}^2} \quad (23)$$

Daraxt grafigi uchun tenglamalarning soliton yechimlarini quyidagi shaklda yozish mumkin

$$\phi_e(x, t) = \sqrt{\frac{1}{g_e} \left(\frac{W_{0e}^2}{9} - V_{0e} + 2 \right)} \sec h(x + S_e) \exp \left[\frac{iW_{0e}}{3} \tan^{-1}(\sinh(x + S_e)) \right], \quad (24)$$

bu yerda $S_1 = S_{1m} = x_0$, $S_{1mn} = L_m + m$, va solitonning markazi hisoblanadi. Soliton yechimlar tenglamasi (24) cho'qqi chegara shartlarini qanoatlantiradi (21), (22) quyidagi shartlarda bajariladi:

$$\frac{W_{01}}{g_1} \left(\frac{W_{01}^2}{9} - V_{01} + 2 \right) = \frac{W_{011}}{g_{11}} \left(\frac{W_{011}^2}{9} - V_{011} + 2 \right) + \frac{W_{012}}{g_{12}} \left(\frac{W_{012}^2}{9} - V_{012} + 2 \right),$$

$$\frac{W_{01m}}{g_{1m}} \left(\frac{W_{01m}^2}{9} - V_{01m} + 2 \right) = \frac{W_{01m1}}{g_{1m1}} \left(\frac{W_{01m1}^2}{9} - V_{01m1} + 2 \right) + \frac{W_{01m2}}{g_{1m2}} \left(\frac{W_{01m2}^2}{9} - V_{01m2} + 2 \right).$$



Maxsus holatda, agar biz V_{0e} va W_{0e} kattaliklarni daraxt grafigiga bog'liq bo'lmagan holda tanlasak, u holda yuqoridagi shartlar quyidagicha ifodalanadi:

$$\frac{1}{g_1} = \frac{1}{g_{11}} + \frac{1}{g_{12}}, \quad \frac{1}{g_{1m}} = \frac{1}{g_{1m1}} + \frac{1}{g_{1m2}} \quad (25)$$

Yuqorida aytilganlarga o'xshab, yuqoridagi yondashuv doirasida, grafik chekli yoki cheksiz grafik bilan bog'langan kamida ikkita yarim cheksiz bog'lanishga ega bo'lishi sharti bilan ixtiyoriy grafik arxitekturasini ko'rib chiqish mumkin.

Xulosa

Ushbu maqolada biz tarmoqlardagi PT-simmetrik solitonlarni metrik grafiklarda PTsimmetrik NLS tenglamasi nuqtai nazaridan modellashtirish orqali ko'rib chiqdik. NLS tenglamasida PT-simmetriya murakkab PTsimmetrik vaqtga bog'liq bo'lmagan potentsiallar bilan ta'minlanadi. Asosiy yulduz grafigi va daraxtsimon grafik uchun masalaning aniq soliton yechimlari olinadi. Olingan yechimlarning barqarorligi tahlili [43] da kiritilgan chiziqli muammo uchun kompleks xos qiymat bifurkatsiyasi usuli yordamida taqdim etiladi. U yulduz grafigi barqarorlik spektri uchun topiladi, ya'ni (18) tenglama bilan berilgan masalaning murakkab xos qiymat spektri yulduz grafigi uchun bog'lanishlar soniga bog'liq. Xususan, agar grafikda toq sonli bog'lar bo'lsa, spektrning tasviriy shakli simmetrik emas, juft sonli bog'lanishli grafik uchun esa spektr $\text{Re } \lambda = 0$ chizig'iga nisbatan simmetrik bo'ladi. Bundan tashqari, (10) tenglama bilan berilgan jamlanmani bajarish holiga mos keladigan yechimlarga barqaror ekanligi aniqlandi. Model metrik daraxt grafigi holatiga kengaytirilgan, buning uchun NLS tenglamasining aniq soliton yechimlari olinadi. Maqolada qo'llaniladigan yondashuv kamida uchta yarim cheksiz bog'lanishning grafigi sharti bilan ixtiyoriy metrik grafiklarga qo'llanilishi mumkin. Metrik grafikda PT-simmetrik NLS tenglamasini chiziqdagiga nisbatan ko'rib chiqishning afzalligi grafik topologiyasini o'ynash orqali solitonni "sozlash" ga erishish mumkinligi bilan bog'liq. Bunday omil BEC fizikasi, optoelektronika va boshqa potentsial sohalarda PT-simmetrik turgan solitonlarni amaliy qo'llash uchun muhimdir.

Nihoyat, shuni ta'kidlaymizki, tarmoqlarda PT-simmetrik doimiy solitonlarni yuqorida o'rganish tarmoqlangan PT-simmetrik optik to'lqin o'tkazgichlar yoki tolalarni hisobga olgan holda chiziqli bo'lmagan optikada eksperimental ravishda amalga oshirilishi mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati:

- [1.] BenderCMand Boettcher S 1998 Phys. Rev. Lett. 80 5243
- [2.] El-Ganainy R, Makris KG, ChristodoulidesDNand Musslimani ZH2007 Opt. Lett. 32 2632
- [3.] Ch Rüter E et al 2010 Nat. Phys. 6 192
- [4.] Szameit A, RechtsmanMC, Bahat-TreidelOand SegevM2011 Phys. Rev. A 84 021806
- [5.] KonotopVV, Yang J va ZezyulinDA 2016 Rev. Mod. Phys. 88 035002
- [6.] ChristodoulidesD va Yang J-K (ed) 2018 Parity-Time Symmetry and Its Applications (Springer)
- [7.] AblowitzMJ va Musslimani ZH2013 Phys. Rev. Lett. 110 064105
- [8.] AblowitzMJ va Musslimani ZH2014 Phys. Rev. E 90 032912
- [9.] AblowitzMJ va Musslimani ZH2016 Nonlinearity 29 915
- [10.] AblowitzMJ va Musslimani ZH2016 Stud. Appl. Math. 139 7
- [11.] SinhaDand Ghosh PK2015 Phys. Rev. E 91 042908
- [12.] Yang J 2018 Phys. Rev. E 98 042202
- [13.] Yan Z 2013 Phil. Trans. R. Soc. A371 20120059



- [14.] Yan Z 2015 Applied Mathematics Letters 47 6168
- [15.] Chen Y, Yan Z, Mihalache D and Malomed B A 2017 Scientific Reports 7 1257
- [16.] Yan Z, Wen Z and KonotopVV2015 Phys. Rev. A 92 023821
- [17.] Wen Z va Yan Z 2017 CHAOS27 053105
- [18.] Zhong M, Yan Z va Tian S-F 2023 Communications in Nonlinear Science va Numerical Simulation 118 107061
- [19.] Yan Z 2008 Phys. Scr. 77 025006
- [20.] Chen Y, Yan Z va Malomed BA 2022 Physica D: Nonlinear Phenomena 430133099
- [21.] Li X, Wang L va Yan Z 2023 Physics Letters A 459 128607
- [22.] Song J, Malomed BA and Yan Z 2023 Proc. R. Soc. A. 479 2023045720230457
- [23.] BurlakGand Malomed SG2016 Chaos 26 113103
- [24.] Miroshnichenko A E, Malomed B Aand Kivshar Y S 2011 Phys. Rev. A 84 012123
- [25.] Kartashov YV, Malomed BA va Torner L 2014 Optics Letters 39 5641–4
- [26.] GökselNA, AntarN va Bakirtaş I 2015 Optics Communications 354 277285
- [27.] GökselNA, AntarN va Bakirtaş I 2018 Chaos, Solitons va Fractals 109 83–9
- [28.] Sobirov Z, Matrasulov D, Sabirov K, Sawada S va NakamuraK2010 Phys. Rev. E81066602
- [29.] Sobirov Z, Matrasulov D, Sawada S and NakamuraK2011 Phys. Rev. E 84 026609
- [30.] Adami R, Cacciapuoti C, FincoDand NojaD2011 Rev. Math. Phys 23 4
- [31.] NojaD2014 Philos. Trans. R. Soc. A 372 20130002
- [32.] Uecker H, Grieser D, Sobirov Z, BabajanovDand MatrasulovD2015 Phys. Rev. E 91023209
- [33.] Noja D, PelinovskyDand ShaikhovaG2015 Nonlinearity 28 2343
- [34.] Adami R, CacciapuotiCand NojaD2016 J. Diff. Eq. 260 7397
- [35.] KairzhanA and PelinovskyDE 2018 J. Phys. A: Math. Theor. 51 095203
- [36.] Babajanov D, Matyokubov Kand MatrasulovD2018 J. Chem. Phys. 149 164908
- [37.] Yusupov J R, Matyokubov KS, Sabirov KKand MatrasulovDU2020 Chem. Phys. 537110861
- [38.] Matrasulov D, Sabirov K, BabajanovDand SusantoH2020 EPL 130 67002
- [39.] Sabirov KK, AkramovME, Otajonov S R and MatrasulovDU2020 Chaos, Solitons&Fractals 133 109636
- [40.] AkramovM2022 Phys. Rev. E 105 054205
- [41.] Akramov M, Khashimova F and MatrasulovD2022 Phys. Lett. A 457 128555
- [42.] Barashenkov IV, ZezyulinDA and KonotopVV2016 New J. Phys. 18 075015
- [43.] Nixon S, Ge L and Yang J 2012 Phys. Rev. A 85 023822