

ДИНАМИЧЕСКАЯ РЕАКЦИЯ НА ОРТОТРОПНУЮ ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ОБОЛОЧКУ НАХОДЯЩЕЙСЯ В ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЕ

Кульмуратов Н.Р. ✉[0009-0000-1500-3421], Исмоилова З.Т. [0009-0005-3757-1522]

Кульмуратов Н.Р. – PhD., доцент кафедры “Инженерная механика” Навоийского государственного горно-технологического университета, **Исмоилова З.Т.** - старший преподаватель кафедры “Высшая математика и ИТ” Навоийского государственного горно-технологического университета.

Аннотация. В этой работе рассматривается напряженно - деформированного состояния цилиндрического слоя и окружающей среды при воздействии продольных гармонических волн, динамическая реакция ортотропной цилиндрической оболочки (трубы) находящейся вязкоупругую среду, которая подвергается сейсмическому воздействию. Цилиндрическая оболочка бесконечно длинная, поэтому рассматривается задачи плоской деформируемой состояния. Предполагается, что оболочка совершенно связано с окружающей средой бесконечной протяженности. Исследовался только осесимметричный и не осесимметричные колебания при падающую волну сжатия (поперечную или сдвига). Результаты были получены для разных характеристик вязкоупругих сред - твердых, средних и мягких. Установлено, что параметры ортотропен не влияют на реакцию цилиндрическую оболочку.

Ключевые слова: волна, динамическая реакция, вязкоупругая среда, сейсмическая воздействия, оболочка.

Annotatsiya. Ushbu ishda silindrsimon qatlam va muhitning bo'ylama garmonik to'lqinlar ta'siri ostidagi seysmik ta'sirga ega bo'lgan qovushqoq-elastik muhitda joylashgan ortotropik silindrsimon qobiqning (quvurning) dinamik reaksiyasi kuchlanish-deformatsiya holati o'rganiladi. Silindrsimon qobiq cheksiz uzun, shuning uchun tekislik deformatsiyalanuvchi holat masalalari ko'rib chiqiladi. Qobiq cheksiz darajada atrof-muhit bilan bog'langan deb taxmin qilinadi. Faqatgina tushayotgan siqilish to'lqini (ko'ndalang yoki kesish) paytida aksisimetrik va no aksisimetrik tebranishlari o'rganildi. Natijalar qovushqoq-elastik muhitning turli qattiq, o'rta va yumshoq xarakteristikalari uchun olingan. Ortotropik parametrlar silindrsimon qobiqning reaksiyasiga ta'sir qilmasligi aniqlandi.

Kalit so'zlar: to'lqin, dinamik javob, yopishqoq elastik muhit, seysmik ta'sir, qobiq.

Abstract. This work examines the stress-strain state of a cylindrical layer and the environment under the influence of longitudinal (or transverse) harmonic waves. Dynamic response of an orthotropic cylindrical shell located in a viscoelastic medium, which is subjected to seismic action. The cylindrical shell is infinitely long, so the problems of a plane deformable state are considered. It is assumed that the shell is completely connected with the environment of infinite extent. Only axisymmetric and non-axisymmetric vibrations during an incident compression wave (transverse or shear) were studied. The results were obtained for different characteristics of viscoelastic media – hard, medium and soft. It was found that the orthotropic parameters do not affect the reaction of the cylindrical shell.

Key words: wave, dynamic response, viscoelastic medium, seismic impact, shell.

Введение

Воздействие волн на кусочно-однородное цилиндрическое тело с жидкостью находящегося в деформируемой среде, разрабатывается математическая постановка, методики решения и алгоритм исследования воздействий волн на кусочно-однородное тело с жидкостью. (рис.1).

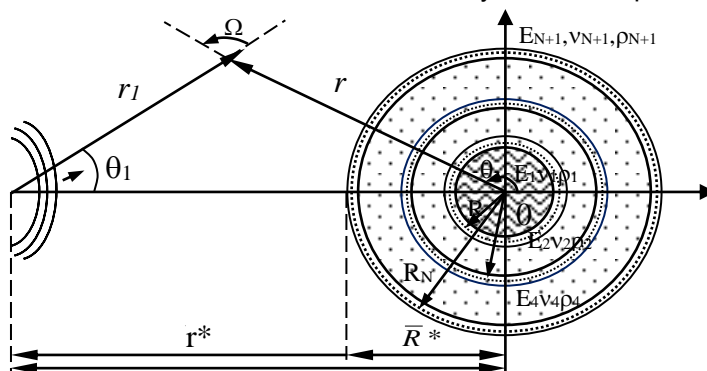


Рис.1. Расчетная схема

Интегро-дифференциальное уравнение движения при отсутствии массовых сил уравнение движения в смещениях имеет вид [1].



$$(\tilde{\lambda}_j + 2\tilde{\mu}_j) \text{grad div} \vec{u}_j - \tilde{\mu} \text{rot rot} \vec{u}_j + \vec{b}_j = \rho_j \frac{\partial^2 \vec{u}_j}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где λ_j и μ_j (в индексе $j = 1, 2, j = 1$ - относятся к окружающей среде, $j = 2$ - к слою) операторные модули упругости

$$\tilde{\lambda}_j f(t) = \lambda_{0j} \left[f(t) - \int_{-\infty}^t R_\lambda^{(i)}(t - \tau) f(\tau) d\tau \right],$$

$$\tilde{\mu}_j f(t) = \mu_{0j} \left[f(t) - \int_{-\infty}^t R_\mu^{(i)}(t - \tau) f(\tau) d\tau \right]$$

Материалы и методы

Для потенциалов скорости частиц жидкости, при давлениях до 100 МПа движения в жидкости удовлетворительно описывается волновыми [2].

$$\Delta \phi_0 = \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial t^2}, \quad (2)$$

Скорости жидкости и слоя на поверхности их контакта $r = R_0$ должны быть равны

$$\left. \frac{\partial \phi_0}{\partial r} \right|_{r=R_0} = \left. \frac{\partial u_{r2}}{\partial t} \right|_{r=R_0}, \quad (3)$$

где u_{r2} – перемещения слоя по нормали. На контакте двух тел $r = R$ выполняется равенство смещений и напряжений (условие жесткого контакта)

$$u_{r1} = u_{r2}; \sigma_{rr1} = \sigma_{rr2}; u_{\theta 1} = u_{\theta 2}; u_{z1} = u_{z2}; \sigma_{r\theta 1} = \sigma_{r\theta 2}, \sigma_{rz1} = \sigma_{rz2} \quad (4, a)$$

В случае скользящего контакта грунта по поверхности трубы последнее уравнение в (4) примет вид [3]:

$$\sigma_{r\theta 1} = 0, \sigma_{rz1} = 0, \sigma_{r\theta 2} = 0, \sigma_{rz2} = 0. \quad (4, б)$$

Краевые условия свободно от нагрузки ставится в виде:

$$r = a; \quad \sigma_{rr} = 0; \quad \sigma_{r\theta} = 0; \quad \sigma_{rz} = 0, \quad (4, c)$$

где σ_{rr} - нормальные $\sigma_{r\theta}$ и σ_{rz} - касательные напряжения.

Соответствующий напряжений и перемещенный, окружающие среды и цилиндрических труб в потенциалах перемещений имеет следующий вид [4,5]:

$$\sigma_{rr} = \lambda \nabla^2 \phi + 2\mu \left[\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\gamma \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + e \frac{\partial^3 \chi}{\partial r^2 \partial x} \right) \right];$$

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + e \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \theta}, u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \phi}{\partial r} + e \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta \partial \chi}$$

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} - e \left[\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\gamma \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \right] \quad (5)$$

$$\sigma_{\chi\chi} = \lambda \nabla^2 \phi + 2\mu \left[\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - e \left(\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \chi - \frac{\partial^3 \chi}{\partial x^3} \right) \right) \right];$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda \nabla^2 \phi + 2\mu \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} \right) + \frac{e}{r} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \chi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \chi}{\partial r \partial e^2 \partial \chi} \right) \right];$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial \chi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \right) \right] + 2e \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^3 \chi}{\partial r \partial \theta \partial \chi} \right);$$

$$\sigma_{rx} = \mu \left\{ 2 \frac{\partial \phi}{\partial r \partial \chi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial \chi} + e \left[\frac{\partial^3 \chi}{\partial \gamma \partial \chi} - \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 \chi) \right] \right\};$$

$$\sigma_{\theta x} = \mu \left\{ \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial \chi} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \chi} + e \left[\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta \partial \chi^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 \chi) \right] \right\};$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

Далее применяя процедуру замораживания [6], заменим соотношения (2) приближенными вида

$$\tilde{\lambda} \phi = \lambda_{01} [1 - \Gamma_\lambda^C(\omega_R) - i \Gamma_\lambda^S(\omega_R)]; \tilde{\mu} \phi = \mu_{01} [1 - \Gamma_\mu^C(\omega_R) - i \Gamma_\mu^S(\omega_R)] \phi, \quad (6)$$

где

$$\Gamma_\lambda^C(\omega_R) = \int_0^\infty R_\lambda(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau; \Gamma_\lambda^S(\omega_R) = \int_0^\infty R_\lambda(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau,$$

$$\Gamma_\mu^C(\omega_R) = \int_0^\infty R_\mu(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau, \Gamma_\mu^S(\omega_R) = \int_0^\infty R_\mu(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau,$$

-соответственно косинус и синус образы Фурье ядра релаксации материала. Вектор перемещений среды представляем в виде потенциала

$$\vec{u} = \text{grad } \phi_k + \text{rot } \vec{\psi}_k, \text{div } \vec{\psi}_k = 0,$$



В каждой точке компоненты вектора смещения поверхности цилиндрической полости выражаются через продольные (ϕ) и поперечные потенциалы ($\psi_r, \psi_\theta, \psi_z$), которые удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям в частных производных:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi - \frac{1}{c_p^2 \Gamma_k} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= 0; \\ \nabla^2 \psi_z - \frac{1}{c_s^2 \Gamma_k} \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2} &= 0; \\ \nabla^2 \psi_\theta - \frac{\psi_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} - \frac{1}{c_s^2 \Gamma_k} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2} &= 0; \\ \nabla^2 \psi_r - \frac{\psi_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{c_s^2 \Gamma_k} \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial t^2} &= 0. \\ u_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_\theta}{\partial z}; \\ u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_r}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial r}; \\ u_z &= \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} + \frac{\psi_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (7)$$

здесь $c_p^2 = (\lambda_{01} + 2\mu_{01})/\rho$; $c_s^2 = \mu_{01}/\rho$,

$$\Gamma_k = 1 - \Gamma^c - i\Gamma^s, \Gamma_\lambda^c = \Gamma_\mu^c = \Gamma^c, \Gamma_\lambda^s = \Gamma_\mu^s = \Gamma^s, R_\lambda = R_\mu = R.$$

Решение уравнения (7) ищется в виде:

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\alpha r) \begin{Bmatrix} \cos n \theta \\ -\sin n \theta \end{Bmatrix} e^{\pm i\gamma_p z} e^{-i\omega t}; \\ \psi_r(r, \theta, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{nr}(\beta r) \begin{Bmatrix} \sin n \theta \\ -\cos n \theta \end{Bmatrix} e^{\pm i\gamma_p z} e^{-i\omega t}; \\ \psi_\theta(r, \theta, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{n\theta}(\beta r) \begin{Bmatrix} \cos n \theta \\ -\sin n \theta \end{Bmatrix} e^{\pm i\gamma_p z} e^{-i\omega t}; \\ \psi_z(r, \theta, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{nz}(\beta r) \begin{Bmatrix} \sin n \theta \\ \cos n \theta \end{Bmatrix} e^{\pm i\gamma_p z} e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (8)$$

где ω - комплексная частота; $r = \frac{r_1}{a_0}$, $z = \frac{z_1}{a_0}$. Подставляя (8) в (7), получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi_n}{dr} + \left(\alpha^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \varphi_n &= 0; \\ \frac{d^2 \psi_{zn}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_{zn}}{dr} + \left(\beta^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \psi_{zn} &= 0; \\ \frac{d^2 \psi_{\theta n}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_{\theta n}}{dr} + \frac{1}{r^2} (-n^2 \psi_{\theta n} + 2n \psi_{\theta n} - \psi_{\theta n}) + \beta^2 \psi_{\theta n} &= 0; \\ \frac{d^2 \psi_{rn}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_{rn}}{dr} + \frac{1}{r^2} (-n^2 \psi_{rn} + 2n \psi_{\theta n} - \psi_{rn}) + \beta^2 \psi_{rn} &= 0; \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь обозначены:

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{\Omega^2}{\gamma^2} - \gamma_p^2; \quad \beta^2 = \Omega^2 / \Gamma_k - \gamma_p^2; \quad \Omega = \frac{\omega a}{c_s}; \quad \gamma^2 = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \Gamma_k; \\ \Gamma^s &= \frac{A\Gamma(\alpha)}{(\omega^2 + \beta^2)^{\alpha/2}} \text{Sin}(\alpha \arctg \frac{\omega}{\beta}), \quad \Gamma^c = \frac{A\Gamma(\alpha)}{(\omega^2 + \beta^2)^{\alpha/2}} \text{Cos}(\alpha \arctg \frac{\omega}{\beta}). \end{aligned}$$

при $r \rightarrow \infty$ удовлетворяют условию излучения Зоммерфельда [7,8]. Первые два уравнения в (7), имеют следующие решения для случая цилиндрической полости:

$$\varphi_n(r) = F_n H_n^{(1)}(\alpha r), \quad (10)$$

$$\psi_{zn}(r) = M_{1n} H_n^{(1)}(\beta r)$$

Для решений уравнений в (7) целесообразно рассмотреть их сумму и разность. При этом получается два уравнения, решения которых выражаются через функции Ханкеля разного порядка

$$\psi_{rn}(r) = D_{1n} H_{n-1}^{(1)}(\beta r) + D_{2n} H_{n+1}^{(2)}(\beta r),$$

$$\psi_{\theta n}(r) = D_{1n} H_{n-1}^{(1)}(\beta r) - D_{2n} H_{n+1}^{(2)}(\beta r).$$

Таким образом, компоненты вектора смещений в окрестности цилиндрической полости представляется в виде:

$$u_r = \sum_{n=0}^{\infty} \left[F_n \frac{dH_n^{(1)}(\alpha r)}{dr} + D_{2n} i\gamma_p H_{n+1}^{(1)}(\beta r) + M_{1n} n H_n^{(1)}(\beta r) / r \right] \begin{Bmatrix} \cos n \theta \\ -\sin n \theta \end{Bmatrix} e^{i(-\omega t + \gamma_p z)},$$



$$u_{\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-F_n n H_n^{(1)}(\alpha r) / r + D_{2n} i \gamma_p H_{n+1}^{(1)}(\beta r) - M_{1n} \frac{dH_n^{(1)}(\beta r)}{dr} \right] \begin{pmatrix} s \sin n \theta \\ \cos n \theta \end{pmatrix} e^{i(-\omega t + \gamma_p z)}, \quad (11)$$

$$u_z = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-F_n i \gamma_p H_{n+1}^{(1)}(\alpha r) - D_{2n} \left[\frac{dH_{n+1}^{(1)}(\beta r)}{dr} + \frac{n+1}{r} H_{n+1}^{(1)}(\beta r) \right] \right] \begin{pmatrix} \cos n \theta \\ -s \sin n \theta \end{pmatrix} e^{i(-\omega t + \gamma_p z)}.$$

Из уравнения (11) три произвольные постоянные F_n, D_{2n}, M_{1n} и удовлетворяют уравнению движения. При $\sigma_{rr} = 0$ и $\sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0$, дисперсионное уравнение имеет вид:

$$\|c_{ij}\| = 0, i, j = 0, 1, 2, 3. \quad (12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} c_{11} &= (n^2 - 1 - \Omega^2 + \gamma_p^2) H_n^{(1)}(\alpha), \\ c_{12} &= (n^2 - 1 - \beta^2) H_n^{(1)}(\beta), \\ c_{13} &= 2(n^2 - 1) [\beta H_{n-1}^{(1)}(\beta) - n H_n^{(1)}(\beta)] - \beta^2 H_n^{(1)}(\beta), \\ c_{21} &= \alpha H_{n-1}^{(1)}(\alpha) - (n+1) H_n^{(1)}(\alpha), \\ c_{22} &= \beta H_{n-1}^{(1)}(\beta) - (n+1) H_n^{(1)}(\beta), \\ c_{23} &= (2n^2 + n - \gamma_p^2) H_n^{(1)}(\beta) - 2\beta H_{n-1}^{(1)}(\beta), \\ c_{31} &= \alpha H_{n-1}^{(1)}(\alpha) - n H_n^{(1)}(\alpha), \\ c_{32} &= (1 - \Omega^2 / 2\gamma_p^2) (H_{n-1}^{(1)}(\beta) - n H_n^{(1)}(\beta)), \\ c_{33} &= n^2 H_n^{(1)}(\beta). \end{aligned}$$

Заключения

Аргументами функций Ханкеля 1-го рода n -го порядка (9) являются многозначные функции α, β . Наиболее эффективным способом решения уравнения (12), является метод Мюллера, который и был здесь использован.

С коэффициентом демпфирования он связан следующей формулой:

$$\delta = 2\pi\Omega_I / \Omega_R.$$

Выражения для напряжений и смещений имеют вид:

$$\left(Re + iIm \right)^{-i\omega t} \left(Re^2 + Im^2 \right)^{1/2 - i(\omega t - \gamma)}.$$

Поэтому на основе численных экспериментов установлено, что из 5-6 членов ряда точность достигла $10^{-8} - 10^{-6}$. В качестве ядра релаксации вязкоупругого материала примем трехпараметрическое ядро

$$R(t) = \frac{Ae^{-\beta t}}{t^{1-\alpha}} \quad (13)$$

Ржаницына - Колтунова, обладающей слабой сингулярностью, где A, α, β - параметры материалы.

Список использованные литературы

- [1]. Amosov, A.A., & Sinisin, S.B. (2001). *Osnoviteorii seymostoykosti soorujeniy*. (p.96). Izd-vo ASV.
- [2]. Armanovich, I.G., Luns, G.L., & Elsgolid, L.E. (1968). *Funksii kompleksnogo peremennogo. Operatsionnoe ischislenie. Teoriya ustoychivosti*. (p.416). Izd-vo «Nauka», Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literaturi.
- [3]. Birbraer, A.N. (1998). *Raschyot konstruksiy na seymostoykost*. (p.255). SPb.: Nauka.
- [4]. Brychkov, Yu.A., & Prudnikov, A.P. (1977). *Integralnie preobrazovaniya obobshennix funktsiy*. (p.288). Moscow: Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literaturi izd-va «nauka».
- [5]. Bulichev, N.S. (1994). *Mexanika podzemnix soorujeniy*. (p.382). Moscow: «nedra».
- [6]. Jin, G.; Ma, X.; Wang, W.; Liu, Z. An energy-based formulation for vibro-acoustic analysis of submerged submarine hull structures. *Ocean. Eng.* 2018, 164, 402–413.
- [7]. Qu, Y.; Hua, H.; Meng, G. Vibro-acoustic analysis of coupled spherical–cylindrical–spherical shells stiffened by ring and stringer reinforcements. *J. Sound Vib.* 2015, 355, 345–359.
- [8]. Ismoil Safarov, Mukhsin Teshae, Tulkin Ruziev, Matlab Ishmamatov, Nurillo Kulmurov Proper normal waves in a two-layer tube taking into account the rheological properties of materials. *E3S Web of Conferences* 417, 06004 (2023) GEOTECH-2023 Publishing pp. 1-6.