

КОЛЕБАНИЯ ПЛОСКОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ СПИРАЛЬНОЙ ПРУЖИНЫ

Ismoil Safarov [0000-0003-0983-8451], *Nuriddin Esanov* [0009-0009-1460-1812],
Shaxobiddin Xalilov [0009-0001-2005-7704], *Jonibek Saipnazarov* [0009-0005-6796-233X]

Сафаров И.И. – д.ф.-м.н. профессор Ташкентского химико-технологического института, **Эсанов Н.К.** - доцент университета Альфрагануса, esanov-7373@mail.ru, **Халилов Ш.Ф.** - старший преподаватель университета Альфрагануса, shaxobiddinxalilova@gmail.com, **Саипназаров Ж.М.** - старший преподаватель кафедры «Естественные науки» Каршинского филиала ТУИТ, jonibeksaipnazarov@gmail.com.

Аннотация. В работе рассматриваются колебания плоской вязкоупругой спиральной пружины. Малые колебания тонкого криволинейного стержня, упругая линия которой является плоской кривой и одно из главных направлений поперечного сечения которой лежит в плоскости кривой, распадаются на два вида: колебания со смещениями, в плоскости кривой и со смещениями, перпендикулярными плоскости кривой. Приводится построение асимптотических разложений для собственных функций и собственных частот, соответствующих обоим видам колебаний многократно закрученной плоской спиральной пружины с закрепленными концами. В качестве частного случая рассмотрены колебания вязкоупругого стержня.

Ключевые слова: колебания, собственные функции, криволинейный стержень, упругая линия, частота, спиральная пружина.

Annotation. The paper considers the vibrations of a flat viscoelastic coil spring. Small vibrations of a thin curved rod, the elastic line of which is a flat curve and one of the main directions of the cross-section of which lies in the plane of the curve, fall into two types: vibrations with displacements in the plane of the curve and with displacements perpendicular to the plane of the curve. The construction of asymptotic expansions for eigenfunctions and eigenfrequencies corresponding to both types of vibrations of a repeatedly twisted flat spiral spring with fixed ends is given. Vibrations of a viscoelastic rod are considered as a special case.

Keywords: oscillations, eigenfunctions, curved rod, elastic line, frequency, spiral spring

Введение

Трубы, транспортирующие жидкость, имеют важные применения в технике, поэтому исследование их вибрации и стабильности является важной задачей в последние десятилетия. Когда скорость потока превышает определенное критическое значение, тогда в трубе возникают колебательные процессы, что может привести к потере динамической устойчивости и, в результате трубы повреждаются [1,2]. Поэтому требуется необходимо повысить стабильность системы трубопроводов для транспортировки жидкости.

Методы контроля вибрации можно разделить на два типа: пассивные методы контроля [3,4] и активные методы управления [5,6]. Настроенный массовый демпфер [7], функционально градиентный материал [8], нелинейный поглотитель энергии [9] и дополнительная внешняя трубка [10] обычно используются в пассивных методах контроля. Работы [11,12] охватывают широкий спектр моделей труб, в том числе, трубы прямой формы, трубы круглой формы и даже трубы с специальной или произвольной конфигурации, все они появлялись по отдельности, а их комбинация не учитывалась. Фактически, из-за некоторых ограничений или особых требований, комбинированные трубы с прямым изгибом часто могут использоваться в технике, такие как L-, U-, Z-, J-образные трубы и т. д. Таким образом, стоит изучить динамику прямолинейно-изогнутых комбинированных труб

для подачи жидкости. Действительно, некоторые исследователи изучали данные виды труб [13]. В работе [14] была разработана линейная аналитическая модель, включающая связь Пуассона. В работе [15] проведен модальный анализ колебаний в жидкостных средах.

Для примера, однотрубное колено и система трубопроводов с U-образным изгибом был проверен по предложенной модели. Метод динамической жесткости в волновом подходе был использован в работе [16] для определения собственных частот. Трубопровод, транспортирующий жидкость, был принят во внимание в исследовании [17], в котором, в основном, исследовали влияние скорости внутреннего потока на собственные частоты рассматриваемой трубопроводной системы с помощью метода трансфер-матрицы. Кроме того, было обнаружено, что постоянная комбинированная сила может иметь большое влияние на характеристики вибрации трубы криволинейной формы. Как отмечают в работах [18,19], нелинейная сила вызвала деформацию прямого сегмента трубы, статическая деформация и геометрическая нелинейность трубы может оказать значительное влияние на динамику комбинированной изогнутой трубе [20]. К сожалению, этот эффект не был учтен в исследовании [21], и только статическая осевая сила, вызванная статической деформацией трубы, учитывалась в модели [22]. До настоящей времени мало обращено внимание на учет вязкоупругих свойств криволинейного трубопровода. Настоящая работа посвящена решению этих проблем.

Методы

Уравнения колебаний плоской спирали. Кривую, на которой лежат центры тяжести поперечных сечений стержня, назовем упругой линией. В нашем случае это плоская кривая. Координаты точек упругой линии будем характеризовать длиной дуги s , отсчитываемой от ее конца.

Введем неподвижную систему координат ξ, η, ζ с началом в конце. О упругой линии (рис.1.). Ось ξ направим по нормали, η – по бинормали, ζ – по касательной к упругой линии в точке s . Кроме того, в каждой точке упругой линии введем трехгранник Френе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, где орт \bar{i} направлен по нормали \bar{j} – по бинормали, \bar{k} – по касательной к упругой линии в точке s . Пусть $q_0(s)$ -кривизна кривой. Тогда орты неподвижной системы координат $\bar{i}_0, \bar{j}_0, \bar{k}_0$ связаны с ортами $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ соотношениями:

$$\begin{aligned}\bar{i}_0 &= \bar{i} \cos \varphi + \bar{k} \sin \varphi, \\ \bar{j}_0 &= \bar{j}, \\ \bar{k}_0 &= -\bar{i} \sin \varphi + \bar{k} \cos \varphi,\end{aligned}\tag{1}$$

где φ - угол поворота касательной к упругой линии

$$\varphi = \int_0^s q_0(s) ds\tag{2}$$

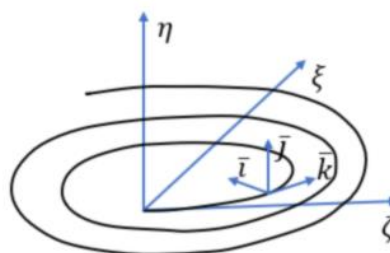


Рис.1. Расчетная схема.

Свободные колебания тонкого нерастяжимого криволинейного стержня со смещениями в его плоскости описываются уравнениями [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial s} + q_0(s)V_z &= \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \beta = \frac{\partial u}{\partial s} + q_0(s)\omega, \\ \frac{dV_z}{ds} - q_0(s)V_x &= \rho S \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial s} = q_0(s)u, \\ B \frac{\partial q}{\partial s} + V_x &= 0, \quad q = \frac{\partial \beta}{\partial s}. \end{aligned} \quad (3)$$

В случае закрепленных концов имеют место граничные условия

$$\begin{aligned} u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad \omega(0, t) = \omega(l, t) = 0, \\ \beta(0, t) = \beta(l, t) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Колебания закрепленного на концах стержня со смещениями, перпендикулярными плоскости кривой, удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_y}{\partial s} &= \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad -\alpha = \frac{\partial v}{\partial s}, \\ A \frac{\partial p}{\partial s} + C q_0(s)r - V_y &= 0, \quad p = \frac{\partial \alpha}{\partial s} + q_0(s)\gamma, \\ C \frac{\partial r}{\partial s} - A q_0(s)p &= 0, \quad r = \frac{\partial \gamma}{\partial s} - q_0(s)\alpha, \end{aligned} \quad (5)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} v(0, t) = v(l, t) = 0, \quad \alpha(0, t) = \alpha(l, t) = 0, \\ \gamma(0, t) = \gamma(l, t) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Неизвестными функциями в (3) и (5) являются: V_x, V_y - перерезывающие силы, V_z - растягивающая сила, действующая на сечение стержня; u, v, ω - проекции смещения на орты $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$; α, β, γ - малые углы поворота трехгранника Френе при колебаниях вокруг ортов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$; p, q, r - проекции изменения главного вектора кривизны упругой линии при колебаниях. Кроме того, здесь обозначено: A и B - жесткости стержня на изгиб; C - жесткость на кручение; S - площадь поперечного сечения; ρ - плотность; l - длина упругой линии. Система уравнений (1.3) приводится к одному уравнению относительно неизвестной ω

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{q_0} \frac{\partial^4}{\partial s^4} \left(\frac{1}{q_0} \frac{\partial \omega}{\partial s} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{q_0} \frac{\partial^3}{\partial s^3} (q_0 \omega) \right] + q_0 \frac{\partial^3}{\partial s^3} \left(\frac{1}{q_0} \frac{\partial \omega}{\partial s} \right) + \\ + q_0 \frac{\partial^2}{\partial s^2} (q_0 \omega) = \frac{\rho S}{B} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{q_0^2} \frac{\partial^3 \omega}{\partial s \partial t^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\omega = \frac{\partial \omega}{\partial s} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial s^2} = 0, \quad s = 0, \quad s = l, \quad t - \text{любое} \quad (8)$$

В уравнении (7) перейдем к переменной φ изменяющейся в пределах от нуля до φ_0 , по формуле (2), где

$$\varphi_0 = \int_0^l q_0(s) ds \quad (9)$$

Основное предположение состоит в том, что φ_0 большое число и $q_0(\varphi)$ меняется медленно. Введем малый параметр

$$\mu = \frac{1}{\varphi_0}, \quad (10)$$

новую переменную

$$z = \frac{\varphi}{\varphi_0} = \mu \varphi, \quad 0 \leq z \leq 1. \quad (11)$$

Тогда

$$\frac{d^n q_0}{d\varphi^n} = \mu^n \frac{d^n q_0}{dz^n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

Причем, величины $\frac{d^n q_0}{dz^n}$ имеют порядок единицы по сравнению с μ . Обозначим

$$r_n = \frac{1}{q_0} \frac{d^n q_0}{dz^n}, \quad n = 1, 2, 3, \quad (13)$$

Для определения собственных частот ω_k и собственных функций $\omega_k(\varphi)$ положим в уравнении (7)

$$\omega(\varphi, t) = \omega_k(\varphi) \cos(\omega_k t + \varepsilon_k)$$

Тогда (опуская индекс k) получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^6 \omega}{d\varphi^6} + 9\mu r_1 \frac{d^5 \omega}{d\varphi^5} + [2 + \mu^2(10r_2 + 19r_1^2)] \frac{d^4 \omega}{d\varphi^4} + [12\mu r_1 + \mu^3(5r_3 + 26r_1 r_2 + 8r_1^3)] \frac{d^3 \omega}{d\varphi^3} + \\ + [1 + \mu^2(11r_2 + 20r_1^2) + \mu^4(r_4 + 6r_1 r_3 + 4r_2^2 + 7r_1^2 r_2)] \frac{d^2 \omega}{d\varphi^2} + \\ + [3\mu r_1 + \mu^3(5r_3 + 26r_1 r_2 + 8r_1^3)] \frac{d\omega}{d\varphi} + \\ + [\mu^2(r_2 + r_1^2) + \mu^4(r_1^4 + 6r_1 r_3 + 4r_2^2 + 7r_1^2 r_2)] \omega = -\frac{\mu^2 \lambda}{q_0^4} \left(\omega - \frac{d^2 \omega}{d\varphi^2} + \mu r_1 \frac{d\omega}{d\varphi} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\lambda = \frac{\rho S \omega^2}{\mu^2 B} \quad (16)$$

Система уравнений (5) приводится к двум уравнениям относительно неизвестных $Y(\varphi, t)$ и $v(\varphi, t)$. Полагая

$$\begin{aligned} Y(\varphi, t) &= q_0(\varphi) Y_k(\varphi) \cos(\omega_k t + \varepsilon_k), \\ (\varphi, t) &= v_k(\varphi) \cos(\omega_k t + \varepsilon_k), \end{aligned} \quad (17)$$

получим для определения собственных функций $Y_k(\varphi)$ и $v_k(\varphi)$ систему уравнений:

$$\begin{aligned} C \frac{d^2 Y}{d\varphi^2} + 3\mu C r_1 \frac{dY}{d\varphi} + [-A + \mu^2 C(r_1^2 + r_2)] Y + (A + C) \frac{d^2 v}{d\varphi^2} + \mu r_1 (A + 2C) \frac{dv}{d\varphi} = 0, \\ -A \frac{d^4 v}{d\varphi^4} - 6\mu A r_1 \frac{d^3 v}{d\varphi^3} + [C - \mu^2 A(4r_2 + 7r_1^2)] \frac{d^2 v}{d\varphi^2} + \\ + \mu [3C r_1 - \mu^2 A(r_3 + 4r_1 r_2 + r_1^3)] \frac{dv}{d\varphi} + \frac{\mu^2 \lambda}{q_0^4} v + (A + C) \frac{d^2 Y}{d\varphi^2} + \mu r_1 (5A + 4C) \frac{dY}{d\varphi} + \\ + \mu^2 (4A r_1^2 + 2A r_2 + 2C r_1^2 + C r_2) Y = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$Y = 0, \quad v = \frac{dv}{d\varphi} = 0, \quad \varphi = 0, \quad \varphi = \varphi_0 \quad (19)$$

где

$$\lambda = \frac{\rho S \omega^2}{\mu^2} \quad (20)$$

Замечание. Общее решение задачи о вынужденных колебаниях в плоскости кривой можно представить в виде ряда по собственным функциям

$$w(s, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k(s) T_k(t) \quad (21)$$

где

$$T_k'(t) + \omega_k^2 T_k(t) = \frac{\int_0^l \left(F_z - \frac{1}{q_0} \frac{\partial F_x}{\partial s} \right) \omega_k ds}{\rho S \int_0^l \left[\omega_k^2 + \frac{1}{q_0^2} \left(\frac{d\omega_k}{ds} \right)^2 \right] ds}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (22)$$

Аналогично

$$Y(s, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_0(s) Y_k(s) T_k(t), \quad v(s, t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(s) T_k(t)$$

где

$$T'_k(t) + \omega_k^2 T_k(t) = \frac{\int_0^l F_y v_k ds}{\rho S \int_0^l v_k^2 ds}.$$

Здесь $F_x(s, t)$, F_y , F_z , означают проекции на орты \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} внешней силы, отнесенной к единице длины стержня.

Результаты и анализ.

В качестве примера рассмотрим колебания манометрической трубки (рис.2). Внешний вид данных образцов показан на рис.2 выполненной из дисперсионно-твердеющей латуни марки ЛАНКМц 75-2-2,5-0,5-0,5 (сплав 156), которые имеют диапазон рабочего давления от 0,06 МПа до 10 МПа. Сравнение теоретических и экспериментальных значений [11] показало, что отклонения частот не превышали погрешностей приборов 10% - для анализатора вибрации Au014. На основании этого можно сделать вывод, что данный метод можно применять для расчета затухающих колебаний манометрических трубок. Исследование влияния геометрических характеристик трубчатых пружин и свойств демпфирующей жидкости на параметры затухания колебаний показало, что увеличение толщины стенки ведет к увеличению частоты затухающих колебаний и уменьшению коэффициента затухания, а увеличение отношения полуосей, центрального угла и радиуса продольной оси ведет к уменьшению частот затухающих колебаний и увеличению коэффициента затухания.

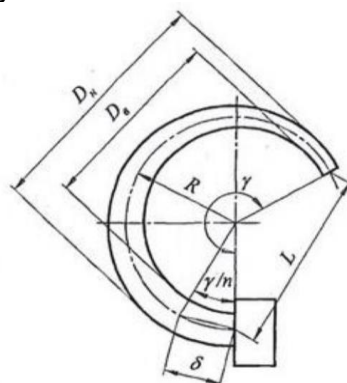


Рис.2. Манометрическая трубка.

Распределение частот по трём модам приведено в таблице 1. Эти результаты хорошо согласуются экспериментом.

Таблица 1. Распределение частот по трём модам

1 –я мода частота	2 -я мода частота	3-я мода частота
8.7621	18.2174	25.3769

Заключения

Таким образом, в работе разработана постановка задачи, методика решения и алгоритм для вычисления перемещений каждой точки спиральной пружины. По полученным результатам можно оценить напряженно -деформированное состояние спиральный пружины.

Список использованных литературы:



- [1.] Wang Y., Lu, T., Jiang P., Cheng P., and Wang K. Large-eddy simulation of fluid mixing in tee with sintered porous medium. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 33(7), 911–922 (2012) <https://doi.org/10.1007/s10483-012-1594-9>
- [2.] Tang, Y., Wang, G., and Ding, Q. Nonlinear fractional-order dynamic stability of fluidconveying pipes constituted by the viscoelastic materials with time-dependent velocity. *Acta Mechanical Salida Sinisa* (2022) <https://doi.org/10.1007/s10338-022-00328-1>
- [3.] Zhao, X. N., Yang, X. D., Zhang, W., and PU, H. Active tuning of elastic wave propagation in a piezoelectric metamaterial beam. *AIP Advances*, 11, 065009 (2021).
- [4.] Song, J., Chen, W., Guo, S., and Yan, D. Larr control on multimode vortex-induced vibration of flexible riser undergoing shear flow. *Marine Structures*, 79, 103047 (2021)
- [5.] Tang, Y., Xu, J., and Yang, T. Natural dynamic characteristics of a circular cylindrical Timoshenko tube made of three-directional functionally graded material. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 43(4), 479–496 (2022) <https://doi.org/10.1007/s10483-022-2839-6>
- [6.] Lye, X., Chen, F., Ren, Q., Tang, Y., Ding, Q., and Yang, T. Ultra-thin piezoelectric
- [7.] lattice for vibration suppression in pipe conveying fluid. *Acta Mechanical Salida Sinisa*, 33, 770–780 (2020)
- [8.] 8.Abdollahi, R., Dehghani Firouz-abadi, R., Rahmanian, M.: On the stability of rotating pipes conveying fluid in annular liquid medium. *J. Sound Vib.* 494, 115891 (2021)
- [9.] Yamashita, K., Nishiyama, N., Katsura, K., Yabuno, H.: Hopf-Hopf interactions in a springsupported pipe conveying fluid. *Mech Syst Signal Pr.* 152, 107390 (2021)
- [10.] Yan, D., Guo, S., Li, Y., Song, J., Li, M., Chen, W.: Dynamic characteristics and responses of flow-conveying flexible pipe under consideration of axially-varying tension. *Ocean Eng.* 223, (2021)
- [11.] 11.Черенцов Д.А. Решение задачи колебаний манометрической трубчатой пружины в вязкой среде // Естественные и технические науки.2014. №11-12. С.19-22.
- [12.] Safarov I., Teshaev M., Marasulov A., Juraev T., Raxmonov B. Vibrations of Cylindrical Shell Structures Filled with Layered Viscoelastic Material. *E3S Web of Conferences*, 264, 01027 (2021)
- [13.] Safarov I.I., Teshaev M.Kh., Yarashev J.A. Vibration of multilayer composite viscoelastic curved pipe under internal pressure. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 1030(1), 012073 (2021). 012073 DOI 10.1088/1757-899X/1030/1/012073
- [14.] Safarov I.I., Teshaev M.Kh., Boltaev Z. Propagation of linear waves in multilayered structural – in homogeneous cylindrical shells. *Journal of Critical Reviews*. 7(12), 893-904 (2020)
- [15.] Safarov I.I., Homidov F.F., Rakhmonov B.S. and Almuratov Sh.N. Seismic vibrations of complex relief of the surface of the naryn canyon (on the Norin river in Kyrgyzstan) during large-scale underground explosions. *Journal of Physics Conference Series*, 1706 (1), 012125, (2020).
- [16.] Safarov, I.I, Teshaev, M.K, Boltaev, Z.I. Propagation of linear waves in multilayered structural - Inhomogeneous cylindrical shells. *Journal of Critical Reviews*, 2020, 7(12), pp. 893–904 DOI 10.31838/jcr.07.12.157
- [17.] Mirsaidov, M., Safarov, I., Boltayev, Z., Teshaev, M. Spread waves in a viscoelastic cylindrical body of a sector cross section with cutouts. *IOP Conference*



Series: Materials Science and Engineering, 2020, 869(4), 042011 DOI 10.1088/1757-899X/869/4/042011

[18.] Mirsaidov, M., Teshaev, M., Ablokulov, S., Rayimov, D. Choice of optimum extinguishers parameters for a dissipative mechanical system. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2020, 883(1), 012100 DOI 10.1088/1757-899X/883/1/012100

[19.] Safarov I.I., Teshaev M.Kh., Nuriddinov B.Z., Ablokulov Sh.Z., Ruzimov A. On indirect excitation of lateral vibrations of the table of the electrodynamic stand suspended in viscoelastic shock absorbers. Journal of Physics: Conference Series. 1921(1), 012113 (2021).

[20.] Safarov I.I., Teshaev M.Kh., Axmedov N.B., Khalilov S.F., Akhmedov M.Sh. On the possibility of propagation of pipe and lemb waves in cylindrical wells filled with liquid. Journal of Physics: Conference Series. 1921(1), 012099 (2021).

[21.] Safarov I., Teshaev M., Marasulov A., Nuriddinov B.Z. Propagation of own non-axisymmetric waves in viscoelastic three-layered cylindrical shells. Engineering journal. 25(7), 97-107 (2021).

[22.] Rakhmonov B.S., Safarov I.I., Teshaev M.Kh., Nafasov R. Vibrations of a deformed half-space with inclusion under the influence of surface waves. E3S Web of Conference, 274, 03027 (2021)