НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ СТАЦИОНАРНОГО НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ЖИДКОСТЬЮ

Ботир Усмонов [0000-0002-4654-9782], Жасур Намозов [0000-0002-3254-9802]

Усманов Б.Ш. - ректор Ташкентского химико-технологического института, д.т.н., профессор., **Намазов Ж.Ш.** - базовый докторант кафедры «Высшая математика» Ташкентского химико-технологического института.

Аннотация. В настоящей статье даны постановки, развиты методы решения и получены численные результаты для новых задач стационарного напряжённого состояния бесконечно длинных цилиндрических оболочек на упругом (акустическом) основании при движении вдоль оси оболочки не осесимметричной волны нормального давления с до резонансной скорости. Методы решения основаны на совместном применении интегрального преобразования Фурье (или метода фундаментальных решений) по осевой координате и разложении всех заданных н искомых величин в ряды Фурье по угловой координате. Разработан и реализован на ЭВМ эффективный алгоритм совместного вычисления интегралов и рядов Фурье.
Ключевые слова: оболочка, ряды Фурье, давления, жидкость, преобразования Фурье, скорость.

Annotatsiya: Bu maqolada nosimmetrik normal bosim to'lqini qobiq o'qi bo'ylab rezonans tezligi bilan harakat qilganda elastik (akustik) asosdagi cheksiz uzun silindrsimon qobiqlarning statsionar kuchlanish holatining yangi masalalari uchun formulalar berilgan, hal qilish usullari ishlab chiqilgan va raqamli natijalar olingan. Yechish usullari integral Furye qatori (yoki fundamental echimlar usulini) eksenel koordinata bo'ylab birgalikda qo'llash va barcha berilgan va qidirilayotgan kattaliklarni burchak koordinatasi bo'ylab Furye qatoriga yoyishga asoslangan. Integral va Furye qatorlarini birgalikda hisoblashning samarali algoritmi ishlab chiqilgan va kompyuterda joriy qilingan.
Kalit so'zlar: qobiq, Furye qatori, bosim, suyuqlik, Furye obrazi, tezlik**.**

Abstract: In this article, formulations are given, solution methods are developed, and numerical results are obtained for new problems of the steady-state stress state of infinitely long cylindrical shells on an elastic (acoustic) foundation during the motion of a non-axisymmetric normal pressure wave along the shell axis with a resonant velocity. The solution methods are based on the combined application of the integral Fourier transform (or the method of fundamental solutions) with respect to the axial coordinate and the expansion of all specified and unknown quantities in Fourier series with respect to the angular coordinate. An efficient algorithm for the combined calculation of integrals and Fourier series has been developed and implemented on a computer**.**
Key words: shell, Fourier series, pressure, liquid, Fourier transforms, velocity.

Введение.

Действие не осесимметричной (или осесимметричной) подвижной волны нормального давления на цилиндрическую оболочку, взаимодействующую с заполнителями рассмотрена в работах [1,2]. Собственные колебания и распространение свободных волн в цилиндрических оболочках, взаимодействующих с жидкостью, исследовались многими авторами, в частности в работах [3,4]. При этом рассматривались осесимметричные и не осесимметричные задачи, применялись различные модели для жидкости и оболочки. Вопрос о действии подвижной волны давления на цилиндрическую оболочку, заполненную или окруженную жидкостью, менее изучен, причем было рассмотрено только осесимметричное нагруженные [5]. В настоявшей работа изучается действия движущейся нормального внутреннего давления на цилиндрическую оболочку.

DOI 10.24412/2181-1431-2024-3-61-66

Методология

В данном подразделе с помощью интегрального преобразования по осевой координате и рядов Фурье по углу получено решение задачи о движении вдоль бесконечно длинной цилиндрической оболочки, взаимодействующей с идеальной сжимаемой жидкостью нормального давления, произвольного по длине и окружности, но неизменного во времени профиля. Скорость движения нагрузки постоянна и в подразделе она рассматривается в случае, когда она меньше скорости звука в жидкости. Жидкость заполняет полость между оболочкой радиуса a и со стенкой с ней жесткой цилиндрической стенкой радиуса $b(b >< a)$. Не осесимметрично движение оболочки описывается уравнениями следующими уравнениями

$$L_{ijк}\vec{U}_{0k} - \int_0^t L_{ijк}R_{Eк}(t-\tau)\vec{U}_{0k}(\vec{r},\tau)\,d\tau = \frac{(1-\nu_{0к}{}^2)}{G_{0к}h_{0к}}\vec{P}_к + \rho_{0к}\frac{(1-\nu_{0к}{}^2)}{G_{0к}}\frac{\partial^2\vec{U}_{0k}}{\partial t^2}.(k=1,2) \quad (1)$$

Здесь индекс $k=1$ относится к внутреннему оболочку (или цилиндру), а $k=2$ - к внешнему оболочку, $\vec{U}_k$ - вектор перемещения точек срединной поверхности несущего слоя. Для оболочек Кирхгофа – Лява вектор перемешенный имеет размерность, равную трем. Для выполнения гипотезы типа Тимошенко, размерность вектора $\vec{U}_k$перемещений равна пяти. Линейной уравнение движения заполнителя рассматриваемой механической системы в векторной форме при отсутствии объемных сил принимает вид:

$$\lambda_{0\kappa} graddiv\vec{u}(\vec{r},t) + \mu_{0\kappa}(\nabla^2\vec{u}(\vec{r},t) + graddiv\vec{u}(\vec{r},t)) -$$
$$-\lambda_{0\kappa}\int_0^t R_{\lambda k}(t-\tau) graddiv\vec{u}(\vec{r},\tau)d\tau -$$
$$-\mu_{0\kappa}\int_0^t R_{\mu k}(t-\tau)(\nabla^2\vec{u}(\vec{r},\tau) + graddiv\vec{u}(\vec{r},\tau))d\tau = \rho_\kappa\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2},$$
$$(\kappa = 1, 2{,}3 \ldots\ldots N) \quad (2)$$

где $\vec{r}=\vec{r}(x,y,z,t)$; $R_{\lambda k}(t-\tau), R_{\mu k}(t-\tau)$ – ядро релаксации; $\lambda_{к0}, \mu_{к0}$ – мгновенные модули упругости; $\vec{u}$–вектор перемещений; $\rho_к$-плотность среды; κ - порядковой номер слоев, $\nu_к$ – коэффициент Пуассона, которого считаем не релаксирующей величиной [6].

Не осесимметрично движение оболочки типа Тимошенко описывается уравнениями (1), (2) причем в компонентах вектора нагрузок отличен от нуля лишь член $p_3 = -\frac{1-\nu}{2Gh}(q_r \mp p_r)$, где знак минус отвечает случаю $b>a$, а плюс $-b<a$.

Движение идеальной сжимаемой жидкости описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \quad (3)$$

где φ - потенциал скоростей; c_1 - акустическая скорость звука в жидкости;p_0 - плотность жидкости.

Задача сводится к совместному интегрированию уравнений (1), (2) и (3) при выполнении граничных условий непроницаемости оболочки и жесткой стенки

$$\frac{d\varphi}{dr}|r=a = \frac{\partial w}{\partial t}; \frac{d\varphi}{dr}|r=b=0 \quad (4)$$

При этом входящее в (1.3) давление со стороны жидкости выражается через потенциал скоростей по формуле

$$q_r = -p_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}|r=a \quad (5)$$

Рассматривая установившийся процесс, переходим в уравнениях движения оболочки и жидкости к системе координат. Компоненты вектора внешних нагрузок для цилиндрической оболочки, подчиняющие гипотезе Кирхгофа – Лява имеют следующий вид

$$\{P_{1k}, P_{2k}, P_{3k}\} = -\{p_{zk} + q_{zk}, p_{\theta k} + q_{\theta k}, p_{rk} + q_{rk}\}$$

где знак минус зависит от выбора координатных осей. В работе для внутренней оболочки нагрузка минус, а для наружной плюс взяли. Здесь $q_{zk}, q_{\theta k}, q_{rk}$- компоненты напряжения реакции со стороны заполнителя; $p_{zk}, p_{\theta k}, p_{rk}$ - интенсивность внешней нагрузки в соответственно по направлению z, θ, r. Движущейся вместе с нагрузкой, и применяем преобразование Фурье по η. В пространстве изображении решение преобразованных уравнений ищется в виде рядов Фурье по угловой координате θ. Предполагая, что трансформанты заданной нормальной нагрузки и давления жидкости разложимы в ряды Фурье по θ.

$$\{u^0, \omega^0, \psi_x^0, p_r^0, q_r^0\} = \sum_{n=0}^{\infty} \{u_n^0, \omega_n^0, \psi_{xn}^0, p_{rn}^0, q_{rn}^0\} \cos(n\theta);$$

$$\{v^0, \psi_y^0\} = \sum_{n=1}^{\infty} \{v_n^0, \psi_{yn}^0\} \sin(n\theta). \qquad (6)$$

Подставляя (3.4) в преобразованные уравнения движения оболочки, получаем систему алгебраических уравнений для коэффициентов Фурье трансформант перемещений срединной поверхности. В этой системе неизвестными являются коэффициенты разложения давления жидкости, которые должны быть выражены через коэффициенты нормального перемещения оболочки. Представляя трансформанту потенциала скоростей в виде (3.4) и подставляя в преобразованное уравнение (1), приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi_b^0}{\partial r_*^2} + \frac{1}{r_*}\frac{\partial \varphi_n^0}{\partial r_*} - \left[\frac{n^2}{r_*^2} + [1 - M^2]\xi^2\right] \varphi_n^0 = 0 \qquad (7)$$

где $M = \frac{c}{c_1}$ - число Маха.

Решение уравнения (5) при дозвуковом режиме движения $c < c_1$ имеет вид

$$\varphi_n^0 = A_n(\xi) K_n(\beta\xi r_*) + B_n(\xi) I_n(\beta\xi r_*); \beta = \sqrt{1 - M^2}$$

Подставляя (6) в (2), (3), находим связь между реакцией жидкости и нормальным перемещением оболочки:

$$q_{r.n}^0 = p_0 c^2 k \xi^2 f(\xi, n, c) \frac{\omega_n^0}{h},$$

где для $c < c_1$

$$f(\xi, n, c) = \frac{n s_4 - \beta\xi\varepsilon - (n s_2 + \beta\xi\varepsilon s_3) s_5}{(n + \beta\xi s_1)(n s_4 - \beta\xi\varepsilon) - (n s_2 + \beta\xi\varepsilon s_3)(n s_5 - \beta\xi s_6)};$$

$$s_1 = \frac{I_{n+1}(\beta\xi)}{I_n(\beta\xi)}; s_2 = \frac{I_n(\beta\xi\varepsilon)}{I_n(\beta\xi)};$$

$$s_3 = \frac{I_{n+1}(\beta\xi\varepsilon)}{I_n(\beta\xi)}; s_4 = \frac{I_n(\beta\xi\varepsilon)}{I_{n+1}(\beta\xi\varepsilon)};$$

$$s_5 = \frac{K_n(\beta\xi)}{K_{n+1}(\beta\xi\varepsilon)}; s_6 = \frac{K_{n+1}(\beta\xi\varepsilon)}{K_{n+1}(\beta\xi\varepsilon)};$$

$$\varepsilon = \frac{b}{a}.$$

Если оболочка полностью заполнена жидкостью, то формула (3.8) принимает вид

$$f(\xi, n, c) = (n + \beta\xi s_1)^{-1}. \qquad (8)$$

DOI 10.24412/2181-1431-2024-3-61-66

Подставляя найденную связь (7) в систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов разложения трансформант перемещений оболочки, находим

$$\{u_n^0,\omega_n^0,\omega_{xn}^0,\psi_{xn}^0,\psi_{yn}^0\}=-\frac{1-v}{2Gk^2}p_{z,n}\frac{\{\triangle_1,\triangle_2,\triangle_3,\triangle_4,\triangle_5\}}{det_n\|a_{kl}\|}$$

$(k,l=1,\ldots,5)$. (9)

Элементы определителей $det_n\|a_{kl}\|$ вычисляются по формулам

$$a_{11}=-\left(1-\frac{1-v}{3}c_0^2\right)\xi^2-\frac{1-v}{3}n^2;$$
$$a_{12}=-a_{21}=a_{45}=-a_{54}=i\xi\frac{1+v}{2}n;$$
$$a_{13}=a_{31}=i\xi v;$$
$$a_{22}=-\frac{1-v}{2}(1-\frac{2}{3}c_0^2)\xi^2-n^2;$$
$$a_{23}=-\frac{2+(1+v)k_0^2}{2}n;$$
$$a_{25}=k^{-1};a_{32}=n;$$
$$a_{33}=1+k_0^2\frac{1-v}{2}(n^2+\xi^2)-\frac{1-v}{3}c_0^2\xi^2\left[1+\frac{p_0^*}{k}f(\xi,n,c)\right];$$
$$a_{34}=-i\xi k_0^2\frac{1-v}{2k};a_{35}=-k_0^2\frac{1-v}{2k}\frac{n}{k};$$
$$a_{43}=12a_{34};a_{44}=a_{11}-6(1-v)\frac{k_0^2}{k^2};$$
$$a_{53}=-12a_{35};a_{55}=a_{22}-6(1-v)\frac{k_0^2}{k^2};$$
$$a_{14}=a_{15}=a_{24}=a_{41}=a_{12}=a_{51}=a_{52}=0;$$
$$p_0^*=\frac{p_0}{p};c_0=c(\frac{3p}{2G})^{\frac{1}{2}}$$

Определители $\triangle_j$ $(j=1,\ldots,5)$ получаются из $det_n\|a_{kl}\|$ заменой j -го столбцом с элементами $\{0,0,1,0,0\}$. Подставляя (9) в формулу (7), находим коэффициенты Фурье трансформанты давления жидкости

$$q_{r,n}^0=-\frac{1-v}{3}\frac{p_0^*c_0^2}{k}\xi^2f(\xi,n,c)\frac{\triangle_3}{det_n\|a_{kl}\|}p_{r.n}^0$$

Для изгибающего момента и поперечной силы в оболочке получаем

$$M_{x,n}^0=-\frac{ha}{12}p_{r,n}^0\frac{i\xi\triangle_4 nv\triangle_5}{det_n\|a_{kl}\|}; \tag{10}$$

$$Q_{x,n}^0=-\frac{(1-v)k_0^5}{2k}ap_{r,n}^0\frac{i\xi\triangle_4 nv\triangle_5}{det_n\|a_{kl}\|}. \tag{11}$$

Окончательное решение получается подстановкой (10)и (11) в ряды Фурье и применением обратного преобразования Фурье. В качестве примера рассмотрено движение в случае *a>b* системы *l* экспоненциально убывающих по длине и сосредоточенных вдоль окружности самоуравновешенных внешних нагрузок одинаковой интенсивности:

$$p_r(\eta,\theta)=p_2\,exp(\,a\eta)H(-\eta)\textstyle\sum_{k=1}^{l}(\theta-\theta_k); \tag{12}$$

$H(x),\delta(x)$ -функции Хевисайда и Дирака.

В этом случае

$$p_{r,n}^0=\frac{p_2a_n}{a-i\xi}. \tag{13}$$

где a_n - коэффициенты Фурье функции $\sum_{k=1}^{l}(\theta-\theta_k)$.

Таблица 1.

l	θ										
	0	$\frac{\pi}{10l}$	$\frac{\pi}{5l}$	$\frac{3\pi}{10l}$	$\frac{2\pi}{5l}$	$\frac{\pi}{2l}$	$\frac{3\pi}{5l}$	$\frac{7\pi}{10l}$	$\frac{4\pi}{5l}$	$\frac{9\pi}{10l}$	$\frac{\pi}{l}$
2	-10,76	-7,74	3,60	-3,54	2,00	-1,70	0,42	0,02	-1,01	1,16	-1,60
4	-7,11	-6,27	-4,04	-0,45	1,29	0,08	-1,47	-0,61	1,21	-0,11	-1,70
6	-4,75	-4,18	-2,91	-1,72	-0,92	-0,31	0,25	0,47	0,04	-0,74	-1,13
8	-3,94	-3,60	-2,75	-1,78	-1,04	-0,67	-0,53	-0,42	-0,23	-0,02	-0,08

Таблица 2.

l	θ										
	0	$\frac{\pi}{10l}$	$\frac{\pi}{5l}$	$\frac{3\pi}{10l}$	$\frac{2\pi}{5l}$	$\frac{\pi}{2l}$	$\frac{3\pi}{5l}$	$\frac{7\pi}{10l}$	$\frac{4\pi}{5l}$	$\frac{9\pi}{10l}$	$\frac{\pi}{l}$
2	-1,97	-0,61	0,96	-6,73	0,57	-0,35	0,15	0,07	-0,23	0,35	-0,31
4	-1,06	-0,20	-0. 11	0,13	0,36	0,08	-0,34	-0,07	0,36	0,04	-0, 35
6	-0,86	-0,37	-0,01	0,05	0,03	0,03	0,11	0, 17	0,08	-0,09	-1.11
8	-0,71	-0,45	-0,09	0,07	0, 12	0,08	0,21	-0,01	0,02	-0,06	0.08

Если принять $p_2 = 2\pi p_1/l$. где p_1 - интенсивность соответствую:

$$\omega_1^* = \frac{\omega G}{p_1 a} - \frac{1-\nu}{kl}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int_0^{\infty}\frac{\triangle_3[a\cos(\xi\eta)-\xi\sin(\xi\eta)]}{(a^2+\xi^2)}\right\}\times a_n\cos(n\theta)\,; \qquad (14)$$

$$q^* = \frac{q_r}{p_1} = \omega_1^* = -\frac{2(1-\nu)p_0^* c_0^2}{3kl}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\int_0^{\infty}\frac{f(\xi,n,c)\xi^2\triangle_3\,[a\cos(\xi\eta)-\xi\sin(\xi\eta)]}{(a^2+\xi^2)\,det_n\|a_{kl}\|}\right\}$$
$$\times a_n\cos(n\theta)\,.$$

Аналогично с использованием (11), (12), можно записать формулы для M_x, Q_x.

Численные результаты.

Для системы без демпфирования предварительно должна быть определена первая резонансная скорость путем построения дисперсионных кривых для различного числа волн в окружном направлении. Рассмотрение в данном статье ограничено до резонансными режимами движения $(c > c_*)$. при которых $det_n\|a_{kl}\|$ не имеют для всех значений л корней на действительной оси и несобственные интегралы в формулах (14) могут быть найдены по методу Файлона.

При проведении расчетов использовалось представление дельта-функции конечным рядом Фурье с улучшенной сходимостью (12)

$$\delta(\theta) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{N}{n\pi} sin(\frac{n\pi}{N})\, cos(n\theta)\right].$$

Отметим, что перестановка местами суммирования и интегрирования в формулах (14) (что эквивалентно разложению вначале всех величин в ряды Фурье, а затем уже применению преобразования Фурье) приводит к значительной экономии времени считана ЭВМ, так как вычислив один раз значения интегралов для всех необходимых значений л и запомнив полученный массив, эти значения можно затем многократно использовать как для различных значений *в,* так и для различного числа нагрузок *I.* Сходимость интегралов для различных значений проверялась путем численных экспериментов на ЭВМ изменением шага и верхнего предела интегрирования.

Расчеты проведены для стальной оболочки, взаимодействующей со слоем воды. При этом принимались следующие значения параметров:

Kg=2/3; *к*=0,004; e=0,5; *v*=0,3; *a*=1,0; p*=0,128;
c_Q=0,1 | M=1,687 c<1 - дозвуковой режим j.

В силу периодичности приложения сосредоточенных нагрузок по окружности для всех случаев приведены значения от места приложения первой силы до середины расстояния до второй. Аналогичные распределения для безразмерного изгибающего момента $M^* = M_x/hap_1$ и перерезывающей силы *Q* показаны соответственно в табл.1 и 2. Следует отметить, что с ростом числа нагрузок уменьшается частота изменения знака в усилиях, т.е. изменение напряженного состояния в оболочке становится вдоль направляющей более плавным и при $l > 20$ для оценки напряженно-деформированного состояния можно воспользоваться соответствующим осесимметричным решением.

Список использованных литературы:

[1]. Пожуев В. И**.** Действие подвижной нагрузки на цилиндрическую оболочку в упругой среде // Строительная механика и расчет сооружений. – 1978, С. 44–48.
[2]. Maiboroda V.P., Troyanovskii I.Э., Safarov I.I., Vazagashvili G., Katalymova I.V. Wave attenuation in an elastic medium. Journal of Soviet Mathematics, 1992, 60(2), pp. 1379–1382
[3]. Гирнис С. Р**.** Математическое моделирование динамики подкрепленных двухслойными оболочками тоннелей при действии транспортных нагрузок. – Павлодар: Кереку, 2018. – 116 с.
[4]. Alekseyeva L. A. Dynamics of an elastic half-space with a reinforced cylindrical cavity under moving loads // International Applied Mechanics. – 2009. – Vol. 45. – № 9. – P. 75–85.
[5]. Safarov I.I., Homidov, F.F., Rakhmonov, B.S., Almuratov, S.N. Seismic vibrations of complex relief of the surface of the naryn canyon (on the Norin river in Kyrgyzstan) during large-scale underground explosions. Journal of Physics: Conference Series, 2020, 1706(1), 012125 doi:10.1088/1742-6596/1706/1/012125
[6]. Amabili M. Free vibration of partially filled, horizontal cylindrical shells // J. Sound Vib. – 1996. – Vol. 191, No. 5. – P. 757–780.