

ЧЕКСИЗ УЗУНДАГИ КЎП ҚАТЛАМЛИ КОМПОЗИТ ҚОВУШҚОҚ-ЭЛАСТИК МЕХАНИК СИСТЕМАЛАРДА ТЎЛҚИН ТАРҚАЛИШИ

Ботир Усмонов [0000-0002-4654-9782], Жасур Намозов [0000-0002-3254-9802]

Усмонов Б.Ш. - Тошкент кимё-технология институти ректори, т.ф.д. (DSc), профессор., **Намозов Ж.Ш.** - Тошкент кимё-технология институти «Олий математика» кафедраси таянч докторанти.

Аннотация. Маколада тўлқин тарқалиш масаласи хусусий ҳосилалар интегро-дифференциал тенгламаларини оддий дифференциал тенгламалар системасига олиб келинади. Бу тенгламаларни ечиш учун замораживания (музлатиш) усули, ўзгарувчиларни ажратиш усули, Мюллер усули, Годуновнинг ортогонал прогонка усуллари қўлланилди. Олинган натижаларнинг ишончлилиги спектраль чегаравий масаланинг коррект қўйилиши, келтириб чиқарилган математик ифодаларнинг қатъийлиги, асосланган ечиш усулларида фойдаланиш ва ечимларнинг аниқлигини баҳолаш ҳамда бошқа математик қўйилган масалаларнинг ечимлари билан таққослаш ёрдамига асосланади

Калит сўзлар: Тўлқин тарқалиш, интегро-дифференциал тенгламалар, эркинлик даражаси, бир жинсли бўлган система, деформация.

Аннотация. В статье задача о распространении волн сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений интегро-дифференциальных уравнений с конкретными производными. Для решения этих уравнений использовались метод замораживания, метод разделения переменных, метод Мюллера и методы ортогонального привода Годунова. Достоверность полученных результатов основана на правильной постановке спектральной краевой задачи, строгости полученных математических выражений, использовании базовых методов решения и оценке точности решений, а также на помощи сравнения с решения других математических задач.

Ключевые слова: распространение волн, интегро-дифференциальные уравнения, степени свободы, однородная система, деформация.

Abstract. In the article, the problem of wave propagation is brought to the system of ordinary differential equations of integro-differential equations with specific derivatives. To solve these equations, the freezing method, the separation of variables method, the Muller method, and Godunov's orthogonal drive methods were used. The reliability of the obtained results is based on the correct formulation of the spectral boundary problem, the strictness of the derived mathematical expressions, the use of based solution methods and the assessment of the accuracy of the solutions, as well as the help of comparison with the solutions of other mathematical problems.

Key words: Wave propagation, integro-differential equations, degree of freedom, homogeneous system, deformation.

Кириш

Эластик жисмларда (муҳитда ва тўлқин ўтказгичларда (волновод)) гармоник тўлқин тарқалиши жараёнини ўрганишнинг тарихи 130 йилдан ортиқ вақтни ташкил этади. Шу вақт ичида турли геометрияга эга бўлган эластик тўлқин ўтказгичлар (волноводлар)ни ҳар томонлама ўрганишга бағишланган кўплаб илмий ишлар чоп этилган [1,2,3,4]. Бундай масалалар деформацияланувчи қаттиқ жисмлар механикасининг асосий масалаларидан ҳисобланади. Ўтган асирнинг саксонинчи йилларида М.А.Колтунов ва И.Е. Трояновскийларнинг илмий мактабида диссипатив бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган механик системалар квазистатик деформацияланиши назариясига асос солинган. Бу назария кейинчалик В.П.Майборода, М.Мирсаидов, И.И. Сафаров, В.М. Яганов, А.Балакиров ва бошқалар ишида динамик масалалар ечиш учун умумлаштирилган. Уларни

тадқиқотларидан шундай хулоса келиб чиқадики механик система қовушқоқ - эластик ва эластик элементлардан иборат бўлса, системадаги энергиянинг диссипативлик хусусияти диссипатив бир жинсли бўлган системаникидан тубдан фарқ қилар экан. Бу ҳолат эркинлик даражаси чекли бўлган механик системалар учун номлари юқорида келтирилган олимлар томонидан исботлаб берилган [5,6]. Лекин бу назария қонунлари ва назарий асоси жуда оз ўрганилган бўлиб, тўлиқ ўрганишни талаб этади. Ҳозирги техниканинг жуда тез ривожланиб бораётган бир пайтда диссипатив бир жинсли бўлмаган механик системалар хоссасига эга бўлган материаллар техниканинг (радио электрон аппаратларни вибрациясини камайтириш ва ҳимоя қопламалари ва бошқалар) ва қурилишнинг (фундамент ости қатлам, йўл ва аэродром қопламалари ва бошқалар мустаҳкамлигини ошириш) кўп соҳаларида кенг қўлланилади [7,8,9,10]. Юқоридагилардан келиб чиқадики диссипатив бир жинсли бўлмаган механик системалар назарияси масалари ва муаммолари.

Услубият

Ҳар бир қатламни физико-механик ва геометрик ўлчамлари характерловчи параметрлар берилган бўлади: $\tilde{\lambda}_n, \tilde{\mu}_n, \nu_n, \rho_n, A_n, \beta_n, \alpha_n, h_n$.

Деформация ва кучланиш орасидаги қуйидаги формулалар ёрдамида ифодаланади:

$$\sigma_{ij} = \tilde{\lambda} \theta \delta_{ij} + 2\tilde{\mu} \varepsilon_{ij}, \quad \theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33},$$

Кўчиш потенциаллари орқали умумий ҳаракат тенгламаси массали куч ҳисобга олинмаса қуйидаги кўринишни эгаллайди:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \phi_k - \frac{1}{\bar{c}_{pk}^2} \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial t^2} &= 0; \\ \Delta \psi_{zk} - \frac{1}{\bar{c}_{sk}^2} \frac{\partial^2 \psi_{zk}}{\partial t^2} &= 0; \\ \Delta \psi_{rk} - \frac{\psi_{rk}}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_{\theta k}}{\partial \theta} - \frac{1}{\bar{c}_{sk}^2} \frac{\partial^2 \psi_{rk}}{\partial t^2} &= 0; \\ \Delta \psi_{\theta k} - \frac{\psi_{\theta k}}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_{zk}}{\partial \theta} - \frac{1}{\bar{c}_{sk}^2} \frac{\partial^2 \psi_{rk}}{\partial t^2} &= 0; \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \\ u_{rn} &= \frac{\partial \phi_k}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{zk}}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_{\theta k}}{\partial z}; \\ u_{\theta n} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_k}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_{zk}}{\partial z} - \frac{\partial \psi_{\theta k}}{\partial r}; \\ u_{zk} &= \frac{\partial \phi_k}{\partial r} + \frac{\partial \psi_{\theta k}}{\partial r} + \frac{\partial \psi_{zk}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{rk}}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

тенгламалардаги n -чи қатлам (цилиндр) суюқлик билан тўлдирилган бўлса у ҳолда $\psi_{zk} = \psi_{\theta k} = \psi_{rk} = 0$ бўлади.

Кўп қатламли цилиндрик жисм учун ҳар бир қатламнинг кўчиш вектори қуйидаги оралиқларда берилади

$$0 < r_1 \leq a_1; \quad a_1 \leq r_2 \leq a_2; \quad \dots \quad a_{n-1} \leq r_n \leq a_n; \quad a_{N-1} \leq r_N \leq \infty \quad |z_1| < \infty.$$

Сонли натижа суюқликсиз диссипатив бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган цилиндрик жисмга тўлқин тарқалиши масаласи кўрилади. У ҳолда чегаравий шартлар (ички ва ташқи чегаралари юкланишдан озод қилинган, икки қатлам чегарасида қаттиқ маҳкамланганлик шарт) кўйидаги кўринишни эгалайди:

$$\begin{aligned} r = r_1 \quad \sigma_{rr1} = 0; \quad \sigma_{r\theta1} = 0; \quad \sigma_{rz1} = 0; \\ r = r_2 \quad \sigma_{rr1} = \sigma_{rr2}; \quad \sigma_{r\theta1} = \sigma_{r\theta2}; \quad \sigma_{rz1} = \sigma_{rz2}; \\ u_{r1} = u_{r2}; \quad u_{\theta1} = u_{\theta2}; \quad u_{z1} = u_{z2}; \\ r = r_3 \quad \sigma_{rr2} = \sigma_{rr3}; \quad \sigma_{r\theta2} = \sigma_{r\theta3}; \quad \sigma_{rz2} = \sigma_{rz3}; \\ u_{r2} = u_{r3}; \quad u_{\theta2} = u_{\theta3}; \quad u_{z2} = u_{z3}; \\ r = r_4 \quad \sigma_{rr3} = 0; \quad \sigma_{r\theta3} = 0; \quad \sigma_{rz3} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Уч қатламли цилиндр элементларини кўчиши Бессел ва Нейман функциялари билан ифода қилинади

$$\begin{aligned} u_{rk} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \gamma_k [A_{1k} J'_k(\gamma_{1k} r) + A_{2k} Y'_k(\gamma_{1k} r)] + \frac{n}{r} [A_{3k} J_k(\gamma_{2k} r) + A_{4k} Y_k(\gamma_{2k} r)] - \right. \\ \left. - \frac{\alpha \gamma_{2k}}{\mu_{2k}} [A_{5k} J'_k(\gamma_{2k} r) + A_{6k} Y'_k(\gamma_{2k} r)] \right\} \cos n \varphi e^{i(-\omega t + \gamma z)} \\ u_{\varphi k} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{r} \left\{ \gamma_k [A_{1k} J_k(\gamma_{1k} r) + A_{2k} Y_k(\gamma_{1k} r)] + \frac{r \gamma_{2k}}{n} [A_{3k} J'_k(\gamma_{2k} r) + A_{4k} Y'_k(\gamma_{2k} r)] - \right. \\ \left. - \frac{\alpha}{\mu_{2r}} [A_{5k} J_k(\gamma_{2k} r) + A_{6k} Y_k(\gamma_{2k} r)] \right\} \sin n \varphi e^{i(-\omega t + \gamma z)}, \\ u_{zk} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \gamma [A_{1k} J_k(\gamma_{1k} r) + A_{2k} Y_k(\gamma_{1k} r)] + \frac{\gamma_{2k}^2}{n} [A_{5k} J_k(\gamma_{2k} r) + A_{6k} Y_k(\gamma_{2k} r)] \right\} \cos n \varphi e^{i(-\omega t + \gamma z)}, \end{aligned} \quad (3)$$

бунда

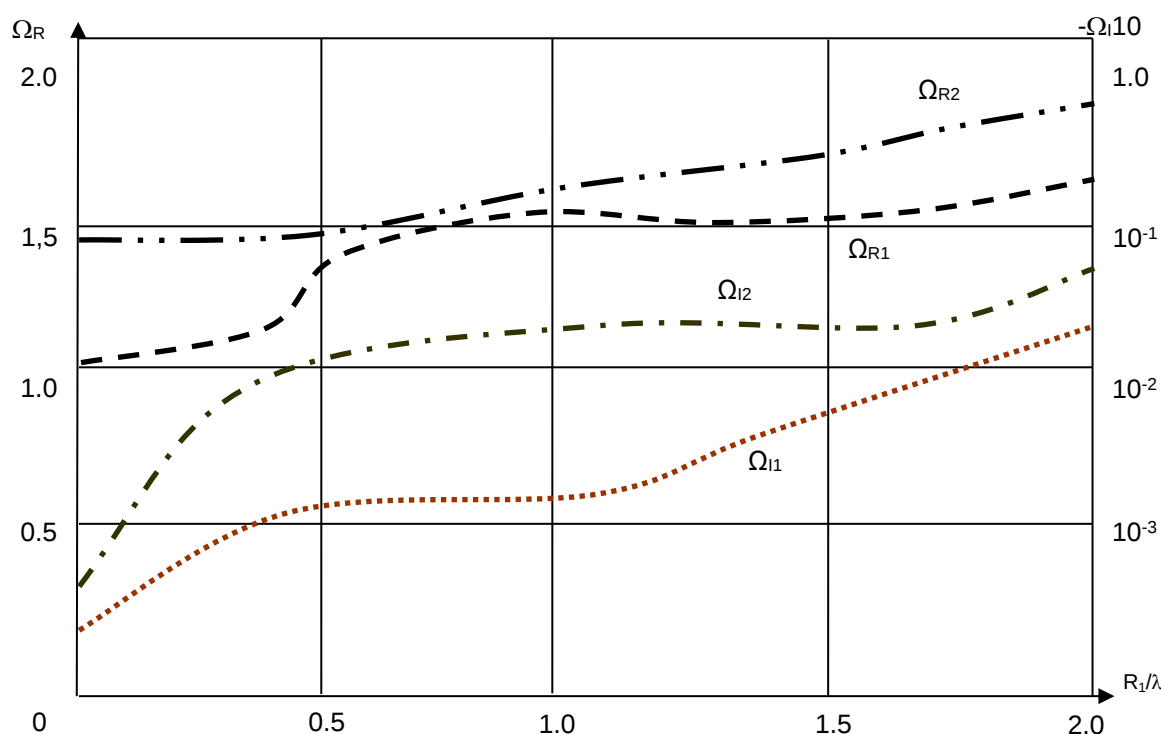
$$\begin{aligned} \gamma_{1k}^2 = \bar{\mu}_{1k}^2 - \gamma^2; \quad \bar{\mu}_{1k} = \frac{\omega}{a_{1k} \Gamma_k}; \quad \gamma_{2k}^2 = \bar{\mu}_{2k}^2 - \gamma^2; \\ \bar{\mu}_{2k} = \omega / a_{2k} \Gamma_{2k}; \quad a_{2k}^2 = \frac{\bar{\mu}_k}{\rho_k}; \quad \gamma = m\pi / l, \quad (m=1,2,\dots) \quad (k=1,2,3) \end{aligned}$$

Агар (3) кўчиш маълум бўлса, у ҳолда деформация ва кучланишлар компоненталарини топиш мумкин [1,2]. Кўчиш компоненталари (3)ни ва улар орқали топилган кучланишларга қўйилса, у ҳолда ихтиёрий ўзгармаслар $A_{1k}, A_{2k}, A_{3k}, A_{4k}, A_{5k}, A_{6k}$ -ни топиш учун 18 номаълум ва 18 тенгламадан иборат бир жинсли кўйидаги комплекс коэффициентли алгебраик тенгламалар системасини оламиз

$$[C]\{q\} = \{0\}.$$

Бир жинсли тенгламалар системаси тривиаль бўлмаган ечимга эга бўлиши учун, тенгламалар системасининг асосий аниқловчиси нолга тенг бўлиши керак ($[C]=0$, элементлари C_{ij} ($i=1,2,\dots,18$; $j=1,2,\dots,18$) Бессел функцияси (махсус функция)нинг 1-чи ва 2- жинси ва n-тартиби билан ифодаланади.

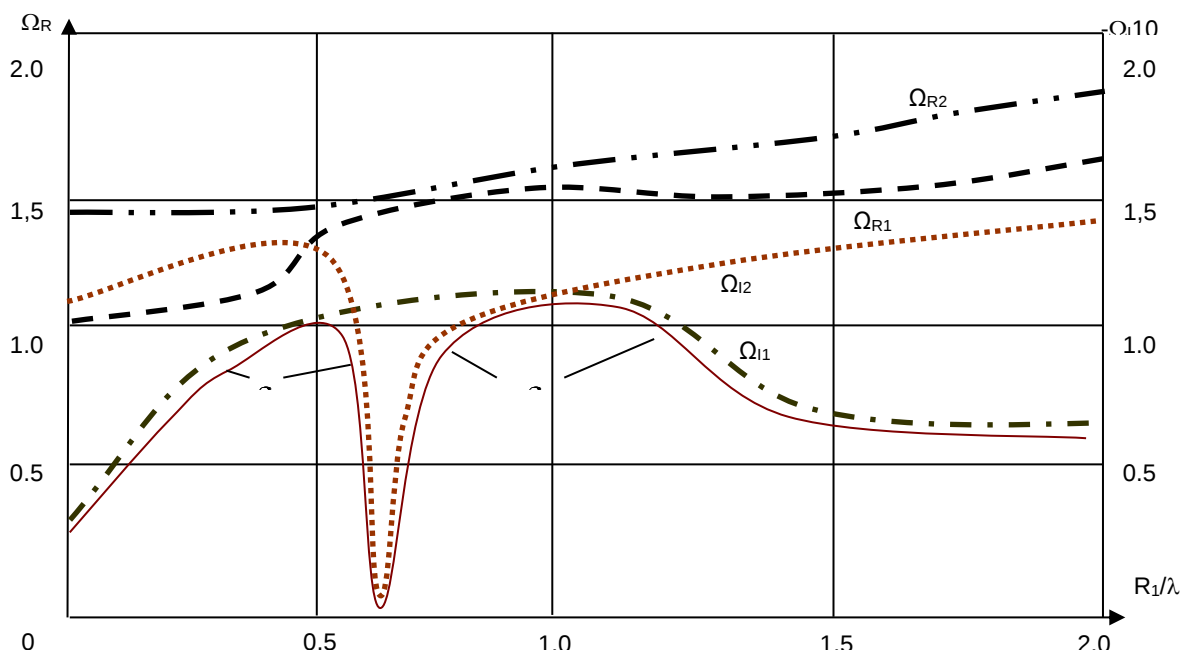
Юқорида келтирилган аниқловчининг тартиби 18 га тенг. Бу аниқловчини кўп ҳад сифатида ёзилганда ω -комплекс параметрнинг трансцендент тенгламасидан иборат бўлади. Бу тенгламани махсус ишлаб чиқилган алгоритм (Гаусс, Муллер ва матрицани аниқловчисини ҳисоблаш усуллари) ва дастур ёрдамида ечилади. Бу алгоритм юқори тартибли аниқловчини кўпҳад сифатида ёзиш учун SUBROUTINE ZDTCD(N, A, C) (N- аниқловчини тартиби, A-аниқловчининг берилиши, C-кўп ҳад сифатида ёзилиши), SUBROUTINE BSEL (N,RO,CJ1,CNZ,F1) ва SUBROUTINE GAUS (A,B,C) ва SUBROUTINE MULER(IPC,FUN,RO,Z0,Z1,Z2) программалардан ташкил топган. Барча ҳолларда ўрта сиртнинг Пуассон коэффициенти 0,25; зичликлар нисбати $\rho_c/\rho=0.35$ (ўрта қатлам зичлигини ташқи қатлам зичлигининг нисбати); G_c/μ -ўрта қатлам ҳажмий сиқилиш модулини ташқи қатлам силжиш модулига нисбати 0.20 га тенг, μ_c/μ ўрта қатлам силжиш модулини, ташқи қатлам силжиш модулига нисбати 0,11 ($1+\Gamma_K$), $\Gamma_K = 1 - \Gamma^C(\omega_R) - i\Gamma^S(\omega)$. Келтирилган уч қатламли конструкциянинг ўртасидаги алюминий қатламдан, уни қопловчи материаллар юқори полимерли материаллардан иборат.



1-расм. Комплекс частотанинг ҳақиқий Ω_R ва мавҳум қисмини Ω_I тўлқин сонига боғлиқ ўзгариши (диссипатив бир жинисли система).

Сонли натижалар ўрта қатлам қалинлигини қоплам қалинлигига нисбати h/b нинг турли қийматлари учун олинди. Дисперсион муносабат комплекс $\Omega(\omega = \omega_R + i\omega_I)$ частотанинг ўлчамсиз тўлқин узунлиги $kh/2\pi$ (ўрта қатлам қалинлигини, тўлқин узунлигига нисбати)га боғлиқ ўрганилди. Хос сонларни ҳисоблашнинг абсолют хатолиги $18 \cdot 10^{-11}$ (хос сон тенгламага қўйилгандан кейинги натижа)тенг. Ҳисоблашлар 1.3а,б – чизмаларда комплекс частотанинг ҳақиқий ва мавҳум қисмини тўлқин сонига боғлиқ ўзгариши келтирилган ($h/b = 0,1$). Диссипатив бир жинсли бўлмаган механик системалар учун олинган [11,12], сўниш коэффицентининг тўлқин сонига боғлиқ ўзгариши монотон бўлмаган функциялар (частоталар ёки фаза тезлигини ҳақиқий қисмларини максимал яқинлашган

қийматларда) орқали ифодаланиши ўз тасдиғини топди. Бу эффектнинг янги қирралари очилди. Диссипатив бир жинсли бўлмаган механик системада глобал сўниш коэффициентини ролида биринчи, иккинчи ва учинчи частоталарнинг мавҳум қисмлари қатнашди.



1-расм. Комплекс частотанинг ҳақиқий Ω_R ва мавҳум қисмини Ω_I тўлқин сонига боғлиқ ўзгариши (диссипатив бир жинсли бўлмаган система).

Узун қатламли цилиндрик композит қовушқоқ-эластик механик системаларда тўлқин тарқалиш масаласи математик қўйилди, ечиш усули ва алгоритми ишлаб чиқилди. Механик системадаги ҳар бир қатламнинг ҳаракат дифференциал тенгламаси Ламе ва Навье тенгламалари орқали ифодаланди. Қатламлар чегарасида қаттиқ маҳкамланганлик ёки сирпаниш шартини қўйилди. Ўрганилаётган жараён турғун тебранишларни ёки турғун тўлқинлар тарқалишини ифодалагани учун бошланғич шартлар қўйилмайди. Масаллар деформацияланувчан қаттиқ жисмлар механикасининг аралаш масаласи ва қўчишлар орқали қўйилган масалаларга келади. Қўйилган масалаларнинг ечимлари экспоненциал ва махсус (Бессел, Нейман ва Ханкел) функциялар орқали ифода қилинади.

Материалларнинг қовушқоқлик хоссалари Больцман – Вольтернинг интеграл муносабатидан фойдаланиб олинди. Релаксация ядроси сифатида Рижаницин-Колтуновнинг кучсиз сингуляр уч параметрли ядросидан фойдаланилди. Агар механик системадаги барча қатламларда (ёки элементларни) қовушқоқлик хоссалари бир хил бўлса, бундай механик системани диссипатив бир жинсли деб атадик. Механик системани баъзи элементлари эластик (ёки қовушқоқликни ифодаловчи релаксация ядроси нолга тенг бўлса) бундай системани диссипатив бир жинсли эмас деб атадик.

Хулоса

Узун қатламли механик системада гармоник тўлқинларни тарқалишини ифодаловчи деформацияланувчан қаттиқ жисм механикасининг аралаш масаласи, мураккаб бўлмаган алмаштиришдан сўнг, спектрал масалага олиб келинди (комплекс коэффициентли оддий дифференциал тенгламалар системаси). Бу

системани ечиш учун Годуновнинг ортогонал прогонка, Мюллер ва матрица аниқловчисини ҳисоблашга доир усуллардан фойдаланиб комплекс арифметикада услубиёт ва алгоритм ишлаб чиқилди. Бу бобда масалалар кўчишлар орқали (Ламе тенгламаси) ҳам қўйилди. У ҳолда масалалар кўчиш потенциаллари орқали ифодаланди (текис масалалар) ва Гельмгольц тенгламасига олиб келинди. Цилиндрик координаталар системасидаги қўйилган масалалар эса комплекс коэффицентли Бессел тенгламасига олиб келинди. Аналитик кўринишдаги дисперсион тенглама олинди ва унинг ечими ҳам Мюллер ва аниқловчиларни ҳисоблашга доир усулларга асосланган услубиёт ва алгоритм асосида ечилди. Икки услуб билан олинган натижалар солиштирилди.

Фойдаланилган адабиётлар рўйхати:

- [1]. Сафаров И.И. Мубораков Я.Н. Оценка сейсмонапряженного состояния подземных сооружений методом волновой динамики. //Сейсמודинамика зданий и сооружений.- Ташкент: Фан,1988. -с. 114-122.
- [2]. Сафаров И.И. Колебания и волны в диссипативно неоднородных средах и конструкциях.- Ташкент: Фан, 1992. - 250 с.
- [3]. Сафаров И.И., Ахмедов М.Ш., Умаров А.О. Динамические напряжения и смещения вблизи цилиндрической подкрепленной полости от плоской гармонической волны // Ежемесячный научный журнал «Prospere»(Новосибирск) 2014,№3 с..57-61
- [4]. Сафаров И.И., Жумаев З.Ф., Рашидов М. Колебания упругого полупространства с цилиндрическими преградами при воздействии поверхностной волны. // Проблемы механики №6. г. Ташкент: 2003.-с.11-14.
- [5]. Сафаров И.И., Тешаев М.Х., Ахмедов М.Ш. Напряженно – деформированные состояния тонкостенных трубопроводов. LAP LAMBERT Academic Publishing Saarbrucen Dentschland /Germanu/-2015 - 335с.
- [6]. Сафаров И.И., Тешаев М.Х., Киличев О. Динамические напряженные состояния тонкостенных трубопроводов. LAP LAMBERT Academic Publishing Saarbrucen Dentschland /Germanu/-2015 - 230с.
- [7]. Стрельчук Н.А.,Славин С.К., Шапошников В.Н. Исследование динамического напряженного состояния тоннельных обделок при воздействии взрывных волн.// Известия вузов. Строительство и архитектура,1971. №9. - с. 129-136.
- [8]. Султанов К. Взаимодействия подземных сооружений с грунтом при воздействия нестационарных упругих и неупругих волн // Автореферат докт. диссертации. М.: 1992г. -31с
- [9]. Pao Y.H., Mow C.C. diffraction of elastic waves and dynamic stress concentration. Grane, Russak, 1973 694 p.
- [10]. Goldsmith W., Sackman J.L. Macroscopic static and dynamic mechanical properties of Yule marble.//-Experimental Mechanics, 1974,vol 14 No.9,p.337-346.
- [11]. Howells D.A.Tunnels in earthquake areas. - Tunnels and Tunnelling, 1972, Sept., h.437.
- [12]. Safarov I. I., Boltaev Z .I., Akhmedov M. Distribution of the natural waves. LAP LAMBERT Academic Publishing Saarbrucen Dentschland /Germanu/-2015. -110 p.