



## РАСЧЕТ КЛИНА НАХОДЯЩЕЙСЯ В ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Кульмуратов Нурулло [0009-0000-1500-3421]

Навоийский государственный горно-технологический университет, PhD, доцент

**Annotatsiya.** Ushbu maqolada eritma ichida burchagi bilan klin keltirilgan va qattiq-plastmassa yarim tekislikka doimiy burchak ostida  $\alpha$  ( $\alpha$  - yarim tekislikka normal va klinning simmetriya o'qi orasidagi burchak) ko'rib chiqilayapti. Klin qirralari qisman notekis va ishqalanish koeffitsienti bilan tavsiflanadi deb taxmin qilinadi. Ishda ikkita holat ko'rib chiqiladi:  $0 \leq \alpha \leq \alpha_*$  va  $\alpha_* \leq \alpha$ . ( $\alpha_*$  - klinning eritmadagi burchagi va ishqalanish koeffitsienti  $\mu$  ga bog'liq). Qiyalik burchagi  $\alpha_*$  ni hisoblash keltirilgan. Plastik mihitda tezlik va kuchlanish maydonlari izchil ekanligi ko'rsatilgan. Ishning asosiy maqsadi klinnilarni  $h$  chuqurlikka kiritishda plastik deformatsiyani aniqlashdir.

**Kalit so'zlar:** plastik deformatsiya, ishqalanish koeffitsienti, sirpanish chizig'i, tezlik, simmetriya o'qi.

**Аннотация.** В работе рассматривается клин с заданным углом раствора и внедряется в жесткопластическую полуплоскость под постоянным углом  $\alpha$  ( $\alpha$  - угол между нормалью к полуплоскости и осью симметрии клина). Предполагается, что грани клина частично шероховаты и характеризуется коэффициентом трения. В работе рассмотрена два случая:  $0 \leq \alpha \leq \alpha_*$  и  $\alpha_* \leq \alpha$ . ( $\alpha_*$  - зависит от угла раствора клина и коэффициента трения  $\mu$ ). Вычисление угла наклона  $\alpha_*$  приведена. Показано, что в пластической области поля скоростей и напряжений согласоваться. Основной целью работа, является определение пластическое деформирование среди при внедрении клина на глубину  $h$ .

**Ключевые слова:** пластическое деформирование, коэффициентом трения, линией скольжения, скорость, ось симметрии.

**Abstract.** The paper considers a wedge with a given angle of solution and is introduced into a rigid-plastic half-plane at a constant angle  $\alpha$  ( $\alpha$  - the angle between the normal to the half-plane and the wedge symmetry axis). It is assumed that the wedge faces are partially rough and are characterized by a friction coefficient. Two cases are considered in the paper: and  $0 \leq \alpha \leq \alpha_*$  и  $\alpha_* \leq \alpha$ . ( $\alpha_*$  - depends on the wedge angle of solution and the  $\mu$  friction coefficient). Calculation of the inclination angle is given. It is  $\alpha_*$  shown that in the plastic region the velocity and stress fields agree. The main objective of the work is to determine the plastic deformation among when the wedge is introduced to a depth of  $h$ .

**Key words:** dynamic response, viscoelastic medium, seismic impact, shell, speed, axis of symmetry.

### Выведение

Подавляющее большинство работ по прониканию относятся либо к высокоскоростному диапазону, либо к среднескоростному, когда необходимо рассматривать волновое движение в преграде [1,2]. Исследование проникания в деформируемую среду представляет собой очень трудную и актуальную математическую задачу. Упрощения при решении этих задач носят двоякий характер: во-первых, используются упрощенные модели твердого тела и, во-вторых, делаются априорные предположения о характере движения среды [3,4]. В частности, очень распространена гипотеза о том, что частицы среды двигаются по прямолинейным траекториям, совпадающими с нормальными к образующим поверхности ударника [5]. Это предположение, по-видимому, оправдано при больших скоростях ударника, когда его скорость близка к скорости ударной внедрение происходит на фоне действия ударной волны. Если же перейти к низким скоростям проникания, то волновое возмущение успевает оторваться от ударника и кинематику внедрения уже нельзя связывать со смещениями в волне напряжений или в ударной волне. Траектории

частиц среды нельзя считать прямолинейными, особенно при наличии свободных поверхностей [6]. Физически очевидно, что частицы материала преграды должны смещаться в сторону свободной поверхности (в сторону "наименьшего сопротивления"). Это обстоятельство хорошо иллюстрируется опытными данными, где отчетливо видно вспучивание свободной поверхности в окрестности внедряющегося тела [7]. Деформируемая преграда описывается моделью идеального несжимаемого жесткопластического тела. Эта модель с одной стороны отражает основные закономерности пластического деформирования материала, а с другой стороны в силу своей простоты позволяет анализировать и решать задачи [8]

### Математическая постановка и методики решения задачи

Пусть клин с углом раствора  $2\beta$  внедряется в жесткопластическую полуплоскость под постоянным  $\alpha$  углом ( $\alpha$  - угол между нормалью к полуплоскости и осью симметрии клина). Грани клина частично шероховаты и характеризуется коэффициентом трения  $\mu$ . Хилл [17] показали, что нормальное внедрение клина ( $\alpha=0$ ) в полуплоскость является геометрически подобным процессом. В общей задаче неустановившегося движения направление и скорость есть определенные функции  $\vec{r}$  радиуса вектора элемента и  $c$  - характерной длины (например, глубины проникания). Когда геометрическое подобие сохраняется, то напряжение и скорость - функции единственной переменной  $\frac{\vec{r}}{c}$ . Косое вдавливание клина в полуплоскость является геометрически подобным, если в процессе вдавливания клина угол наклона остается постоянным и направление скорости не меняется. Ниже проводится анализ косоугольного внедрения клина при постоянном угле наклона  $\alpha$  и направлении скорости. Следует рассмотреть два возможных случая:  $0 \leq \alpha \leq \alpha_*$  и  $\alpha_* \leq \alpha$ . Значение  $\alpha_*$  зависит от угла раствора клина и коэффициента трения  $\mu$ . Вычисление угла наклона  $\alpha_*$  описывается ниже. Пусть  $\alpha_* \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} - \beta$ . В случае  $0 \leq \alpha \leq \alpha_*$ , пластическая область состоит из трех полей: два равномерные и одно центрированное. С увеличением угла наклона оси клина центрированная область уменьшается и при  $\alpha = \alpha_*$  исчезает. В последнем случае (т.е.  $\alpha = \alpha_*$ ) область  $OA'B'$  (рис.1) представляет собой треугольник и движется как жесткое целое.

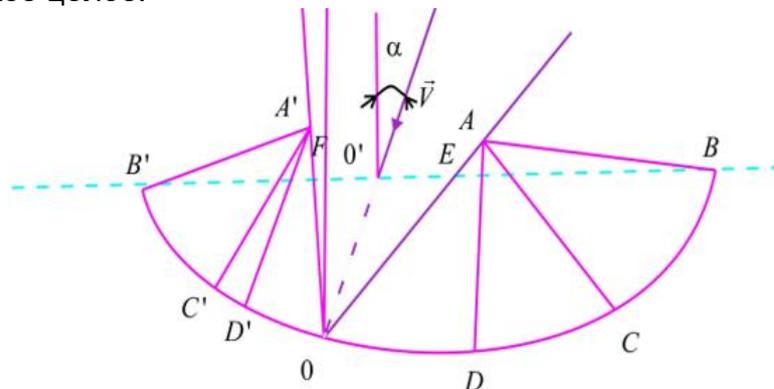
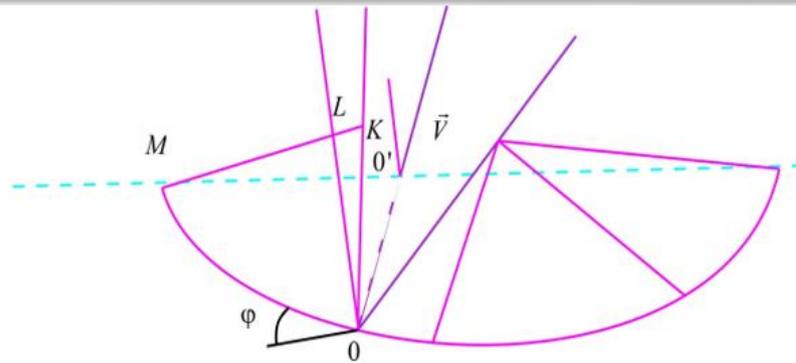


Рис.1. Косой вдавливание клина. Поле линий скольжения ( $0 \leq \alpha \leq \alpha_*$ )



**Рис.2. Схема косо́го вдавливания клина для случая  $\alpha_* \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} - \beta$ .**

При этом  $OB'$  - прямая, линия разрыва касательной составляющей скорости. Допустим, что при  $\alpha > \alpha_*$  такие существует прямая, разделяющая область на две части, одна из которых движется относительно другой как жесткое целое. Эта прямая является изолированной линией скольжения. В работах [19,20] доказано, что изолированная линия скольжения может подходить к свободной поверхности только под углом  $\frac{\pi}{4}$ . С учетом этого утверждения построим следующую схему косо́го

вдавливания клина (рис. 2). Пусть прямая  $OM$  - изолированная линия скольжения. Область  $OML$  движется относительно неподвижной части полуплоскости со скоростью  $V \sin \beta \cos(\varphi + \beta - \alpha)$ , где  $\varphi$  обозначает угол между линией  $OM$  и отрицательной осью  $X$ . Условие равенства площадей треугольников  $MLK$  и  $OO'K$  дает уравнение для определения угла

$$\sin^2 \varphi \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi - \alpha + \beta\right) - \cos^2(\varphi - \alpha + \beta) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) \cos \alpha = 0. \quad (1)$$

Средняя величина напряжений  $q$  вдоль изолированной линии скольжения  $OM$  определяется из условия равновесия  $\square OML$ . Вдоль грани клина  $OL$  действует реакция  $\bar{R}$ , компоненты которой  $(N, T)$  связаны по условию сухого трения:

$$T = \mu N \quad (2)$$

Проектируем все силы, действующие на  $\triangle OML$  на направление  $OL$  перпендикулярно к нему, тогда получим

$$q = \tau_s \operatorname{tg}(\varphi + \beta + 2\rho - \alpha)$$

$$N = OL \cdot \tau_s \frac{\cos 2\rho}{\cos(\varphi + \beta + 2\rho - \alpha)}, \quad T = OL \cdot \tau_s \frac{\sin 2\rho}{\cos(\varphi + \beta + 2\rho - \alpha)}. \quad (3)$$

Следует отметить, что при  $\alpha > \varphi + \beta + 2\rho$  средняя величина напряжения вдоль изолированной линии скольжения растягивающая.

Проекция реакции  $\bar{R}(N, T)$  на направление вдавливания клина равна

$$P' = \tau_s h \frac{\sin(2\rho + \beta)}{\sin \varphi \cos(\varphi + \beta + 2\rho - \alpha)}. \quad (4)$$

Момент от сил, действующих на  $OM$ , относительно точки  $N(l, \gamma)$  равен

$$\frac{M_2}{\tau_s} = \operatorname{tg}(\varphi + \beta + 2\rho - \alpha) \frac{h^2}{\sin^2 \varphi} - l \frac{h}{\sin \varphi} \frac{\cos(\beta + 2\rho + \gamma)}{\cos(\varphi + \beta + 2\rho - \alpha)}. \quad (5)$$

Теперь выясним, при каком угле наклона клина  $\alpha$  и  $\triangle OML$  осуществляется равномерное напряженное состояние

$$p = \tau_s, \quad \theta' = \frac{\pi}{4} + \chi' \equiv \frac{\pi}{2} - \varphi \quad (6)$$

Нормальное и касательное напряжения вдоль  $OL$  равны

$$p_n = \tau_s - \tau_s \sin 2(\varphi - \alpha_* + \beta) \quad \tau_n = -\tau_s \cos 2(\varphi - \alpha_* + \beta)$$

Из условия сухого трения на  $OL$ , находим

$$\alpha_* = \varphi + \beta + 2\rho - \frac{\pi}{4} \quad (7)$$

Подставляя (7) в уравнение (1), получим для  $\varphi_*$  уравнение:

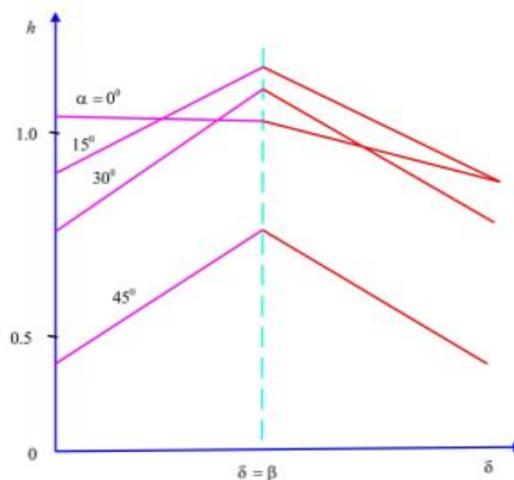
$$\sin^2 \varphi_* \cos 2\rho \sin \beta - \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - 2\rho \right) \cos \left( \frac{\pi}{4} + \varphi_* \right) \cos \left( \varphi_* + \beta + 2\rho - \frac{\pi}{4} \right) = 0. \quad (8)$$

Таким образом, угол  $\alpha = \alpha_*$ , определяется из решений уравнений (8) и (7).

### Численные результаты

На рис.3 приведены зависимости  $h$ ,  $P$  и  $M(N)$  от направления внедрения  $\delta$  для гладкого клина

( $\mu = 0$ ) с углом раствора  $2\beta = 36^\circ$ .



**Рис.3. Изменение глубины внедрения в зависимости от угла  $\delta$  для разных углов наклона  $\alpha$  при  $A/\tau_1 = 1$  и  $\mu = 0$ .**

Из графика  $h \sim \delta$  видно, что при нормальном внедрении ( $\alpha = 0$  и  $\delta = 0$ ) глубина вдавливания достигает максимального значения. С увеличением угла наклона  $\alpha$  наибольшее значение  $h$  получается при угле внедрения  $\delta$  равным половине угла раствора клина.

### Заключения

Таким образом построена математический модель о косом внедрении клина в деформируемой полуплоскостей. Обосновано что, при низкоскоростном неглубоком проникании задача существенно не одномерная и гипотезу о нормальном движении частиц преграды нельзя считать приемлемой. Доказано, что с увеличением угла наклона  $\alpha$  наибольшее значение  $h$  получается при угле внедрения  $\delta$  равным половине угла раствора клина.

### Список использованных литературы:

[1]. Ольшак В., Мруз З., Пежина П. Современное состояние теории пластичности. -М.: Мир,1964. -233с.



[2]. Быковцев Г.И. О поле скоростей при вдавлении плоского штампа в пластическое полупространство. - ПММ, 1961, т.25, №3.- С.552-553.

[3]. Anisimov A. N. and Khromov A. I. The Introduction of a Wedge into Half-space Subject to the Coulomb – Mohr Fluidity, Bulletin of the Samara State Technical University, Series: Physics and Mathematics, 2007, no. 1 (14), pp. 44 -49.

[4]. Чанышев А.И., Абдулин И.М. Деформирование и разрушение первоначально изотропных сред с условием нарушения прочности Мизеса // ФТПРПИ. -2006.-№4.-с. 17-30.

[5]. Chanyshhev A.I., Abdulin I.M. Relationship between the Limit Loads on Elastic Parameters of Anisotropic Medium under Indentation of a Tool. Part II: Problem on a Wedge, Proc InterExpo Geo-Sibir, Novosibirsk, 2012, Vol. 2, No. 1, pp. 171–176

[6]. Danilov B. B. and Smolyanitsky B. N. Promising trends in the area of directional drilling devices for hard rocks, Fundamental and Applied Mining Science, 2016, vol. 3, no. 2, pp. 54 – 59.

[7]. С. М. Алейников, А. В. Чуйков, “Математическое моделирование поверхностной деформации упругого слоя при давлении круглого штампа”, *Труды Второй Всероссийской научной конференции (1–3 июня 2005 г.). Часть 1*, Математические модели механики, прочность и надежность конструкций, Матем, моделирование и краев, задачи, СамГТУ, Самара, 2005, 21–24

[8]. Хилл Р. Математическая теория пластичности / пер. с англ. М.: ГИТТЛ, 1956. 408 с.

[9]. Sher E. N. and Efimov V. P. 3D modeling of fracture growth in solid under the penetration of rigid wedge, Journal of Mining Science, 2015, vol. 51, no. 6, pp. 1108 – 1112.