DOI: 10.24412/2181-1431-2020-2-26-32
УДК: 622.35. 622.71.

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНСТРУКЦИИ БОРТОВ И ВЫЧИСЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В МАССИВЕ ГОРНЫХ ПОРОД МЕСТОРОЖДЕНИЯ КОКПАТАС

Заиров Шерзод Шарипович, профессор кафедры «Горное дело» Навоийского государственного горного института, доктор технических наук, профессор. 210100, Республика Узбекистан, г. Навои, ул. Южная, 27а., **Уринов Шерали Рауфович,** и.о. профессора кафедры «Автоматизация и управление» Навоийского государственного горного института, доктор технических наук, доцент. 210100, Республика Узбекистан, г. Навои, ул. Южная, 27а., **Эломонов Жасур Салимович,** магистрант кафедры «Горное дело» Навоийского государственного горного института. 210100, Республика Узбекистан, г. Навои, ул. Южная, 27а.**,** **Тошмуродов Элёр Дехконович,** магистрант кафедры «Горное дело» Навоийского государственного горного института. 210100, Республика Узбекистан, г. Навои, ул. Южная, 27а.

Аннотация. *В работе разработаны модель и метод расчета напряженно-деформированного состояния массива горных пород для условий месторождения Кокпатас, в результате, которых установлены симметричные границы полубесконечных областей в относительных координатах и несимметричные границы полубесконечных областей в относительных координатах. Исследован метод граничных интегральных уравнений и алгоритм вычисления напряжений в массиве в условиях месторождения Кокпатас.*
Ключевые слова: *Модель, метод расчета, напряженно-деформированное состояние массива горных пород, месторождение Кокпатас, симметричные границы полубесконечных областей в относительных координатах, несимметричные границы полубесконечных областей, метод граничных интегральных уравнений, алгоритм вычисления напряжений.*

Аннотация. Ишда нисбий координаталарда симметрик чегаравий ярим чексиз соҳалар ва нисбий координаталарда асимметрик ярим чексиз чегаравий майдонлар ўрнатилган майдон учун Кокпатас тоғ жинс массасининг штамм ҳолатини ҳисоблаш модели ва усули берилган. Чегаравий интеграл тенгламалар усули ва Кокпатас кони шароитида массивда кучланишларни ҳисоблаш алгоритми ўрганилган.
Калит сўзлар: Модел, ҳисоблаш усули, тош массасининг штамм ҳолати, Кокпатас кони, нисбий координаталарда ярим чексиз ҳудудларнинг симметрик чегаралари, ярим чексиз ҳудудларнинг ассиметрик чегаралари, чегаравий интеграл тенгламалар усули, стрессни ҳисоблаш алгоритми.

Annotation. *In work the developed model and method of calculation of stress-strain state of rock mass for field Kokpatas, which is set symmetrical boundary semi-infinite regions in relative coordinates and asymmetrical semi-infinite boundary areas in relative coordinates. The method of boundary integral equations and the algorithm for calculating stresses in the array under the conditions of the Kokpatas deposit are studied.*
Keywords: *Model, calculation method, stress-strain state of rock mass, Kokpatas deposit, symmetric boundaries of semi-infinite regions in relative coordinates, asymmetric boundaries of semi-infinite regions, method of boundary integral equations, stress calculation algorithm.*

Основным элементом системы «внешние воздействия (строения, горно-транспортное оборудование, буровзрывные работы) – борт карьера – породный массив», определяющим состояние и ее параметры, является породный массив.

Для расчета плоских и объемных откосов использован метод многоугольника сил и метод алгебраического сложения сил. Напряженное состояние на наклонной площадке смоделировано с учетом веса пород «отсека».

Исследования методов теории упругости и оптического моделирования [1-4] показывают, что определенное по методу алгебраического сложения сил гидростатическое напряжение качественно отличается от распределения напряжений.

При оценке устойчивости бортов карьера необходимо выяснить, как формируется напряженное состояние, каким образом формируется собственный вес пород, исследовать воздействие внешних нагрузок и изучить реологические свойства горных пород. Выявление полей напряжений позволит спрогнозировать зарождение разрушения и его квазистатическое распространение. Также необходимо исследовать поля напряжений для определения положения области, в которой происходит зарождение разрушения и ее дальнейшее развитие. Для расчета напряжений необходимо использовать метод математической теории упругости.

Возможность применения данных методов подтверждается тем, что с достаточной точностью горные породы можно отнести к линейно-деформируемым телам вплоть до момента разрушения [5, 6]. В зависимости от характера связей между фазами, слагающими породы, в [6, 7] приводятся различные модели среды и экспериментальные данные, подтверждающие, что горные породы в объеме, значительно превышающем объем слагающих их минералов, могут рассматриваться, как квазиизотропные.

Неупругое поведение горных пород под действием нагрузок характеризуется коэффициентом хрупкости и пластичности $\chi = \sigma_p/\sigma_{сж}$, значения которого более 0,2 свойственны пластичным материалам, а менее 0,2 – хрупким.

Обоснование и построение модели рассмотрим в условиях месторождения Кокпатас.

Состояние пород месторождения Кокпатас можно характеризовать, как квазиизотропное с $\chi <$ 0,2 и считать эти породы дифференциально упругими средами с совершенными связями – кварцитовые метосамотиты, алевролиты, сланцы, с несовершенными связями – глинистые милонитизированные породы.

Породный массив при контурной зоны по всему периметру карьера имеет неоднородное строение, характеризующееся чередованием по простиранию и по глубине различных литологических образований, обладающих широким диапазоном изменения физико-технических характеристик, а также развитием разрывных нарушений в некоторых случаях с мощными зонами дробления пород. Крупные тектонические нарушения расчленяют карьерное поле на крупные тектонические блоки, каждый из которых осложнен более мелкими нарушениями. Породы месторождения имеют местами высокую степень окварцевания. Встречаются прослои и линзовидные включения мелкорассланцованных углистых сланцев, отальккованных в увлажненном состоянии, подобных тугопластичной глине. Зоны дробления часто представлены сильнотрещиноватыми углисто-слюдистыми сланцами, имеющими щебенистую отдельность.

В сечении борт карьера представляет сложный контур с разнообразным геологическим строением горного массива, на который воздействует нагрузка от технологического оборудования, сооружений и отвалов. Протяженность борта во много раз превышает его высоту, что соответствует условию плоской деформации. Поэтому задача сводится к исследованию плоского напряженно-деформированного состояния упругой, однородной, изотропной полубесконечной области со сложным контуром под действием внешних и объемных сил с использованием уравнений [8]:

равновесия

$$\partial\sigma_x/\partial x + \partial\tau_{xy}/\partial y = X; \qquad \partial\tau_{xy}/\partial x + \partial\sigma_y/\partial y = Y; \tag{1}$$

совместности

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0;$$

граничных условий

$$p_{xv} = \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m; \qquad p_{yv} = \tau_{xy}\, l + \sigma_y\, m,$$

где σ_x, σ_y, τ_{xy} – компоненты напряжений; X,Y – проекции объемных сил; l,m – направляющие косинусы на контурной кривой; p_{xv} , p_{yv} – составляющие напряжений на контуре.

Уравнения (1) формулируют первую основную задачу теории упругости, решаемую в напряжениях. Заметим также, что рассматривается установившееся напряженное состояние, справедливое только для случаев начального или конечного (стабилизированного) состояний многофазного грунтового массива, а также для кристаллических массивов горных пород в любой момент времени.

При решении задач теории упругости со сложной конфигурацией границ возникают определенные трудности, связанные с отсутствием аналитических методов решения для таких областей.

В плоской постановке задачи наибольшее применение нашли аналитические методы потенциала Колосова-Мусхелишвили [8]. Достоинство их заключается в сочетании метода рядов с конформными отображениями, сложность которых состоит в построении отображающей функции $\omega(\xi)$ в виде обозримого степенного ряда

$$\omega(\xi)=\sum_{k=-M}^{N} C_k \xi^k, \tag{2}$$

в определенных пределах описывающего область площади S.

Существует много методов построения конформных отображений. Они классифицируются на аналитические и графоаналитические. К аналитическим относится метод представления функции в виде интеграла Кристоффеля-Шварца

$$Z=\omega(\xi)=C_1\int_0^{\xi}(\xi-a_1)^{\alpha_1-1}\dots(\xi-a_n)^{\alpha_n-1}d\xi + C_2, \tag{3}$$

где n – число сторон многоугольника; $\pi\alpha_i$ – внутренние углы многоугольника ($j=\overline{1,n}$); C_1, C_2 – постоянные; $a_j = e^{i\theta_j}$ ($j=\overline{1,n}$) – комплексные координаты точек единичной окружности, переходящих в углы n-угольника.

Функция (2) представлена в виде интеграла, что затрудняет ее применение в методах Н.И.Мусхелишвили.

Из графоаналитических методов наибольшее применение нашли методы П.В.Мелентьева, А.Г. Угодчикова [9]. При построении отображающей функции этими методами на нее накладываются ограничения: отсутствие двойных точек и точек возврата; существование ряда общих точек с границей области S; построенная функция $Z=\omega(\xi)$ должна лежать в допустимых пределах от ∂S.

Метод А.Р. Угодчикова [11] приемлем для конечных и бесконечных областей. Методы отображения бесконечной полуплоскости в полуплоскость с криволинейной границей в настоящее время отсутствуют.

Есть несколько подходов к построению таких отображений [11]. Их находят путем логической комбинации из простейших функций. Примером может служить вид такой функции

$$Z=\omega(\xi)=h(\xi+(A+b_1\xi)/(\xi+a_1-i)-Bi/(\xi-i)^2-C/(\xi-i)^3), \tag{4}$$

где $Z=x+iy$; $\xi=\zeta+i\eta$; $\eta\le 0$; A, B ,C ,a_1, b_1 – постоянные коэффициенты; h – коэффициент пропорциональности.

Перебирая произвольные коэффициенты A, B, C, a_1, b_1 находим различные криволинейные границы области. На рис. 1 и 2 показаны симметричные и несимметричные относительно оси ординат полубесконечные области, описываемые функцией (3), являющейся непрерывной и гладкой в заданных пределах, причем напряжения определяются в относительных величинах и координатах, что позволяет исследовать только качественную картину.

Известно много работ, в которых устойчивость откосов анализируется на основе решений, полученных численными методами, в основном с использованием метода конечных элементов (МКЭ) [12-14], основанного на замене исследуемого объекта совокупностью конечного числа дискретных элементов, связанных между собой в узлах.

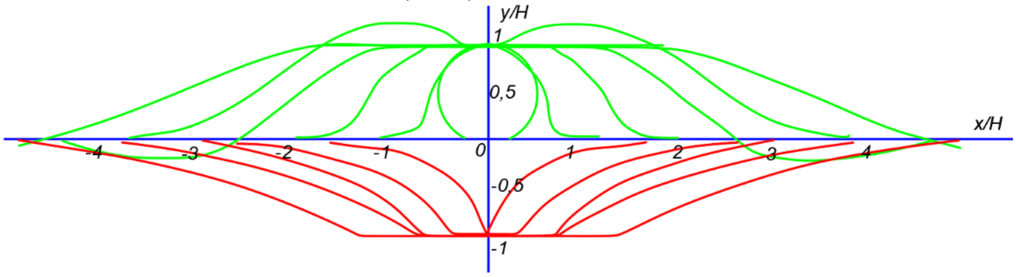


Рис. 1. Симметричные границы полубесконечных областей в относительных координатах

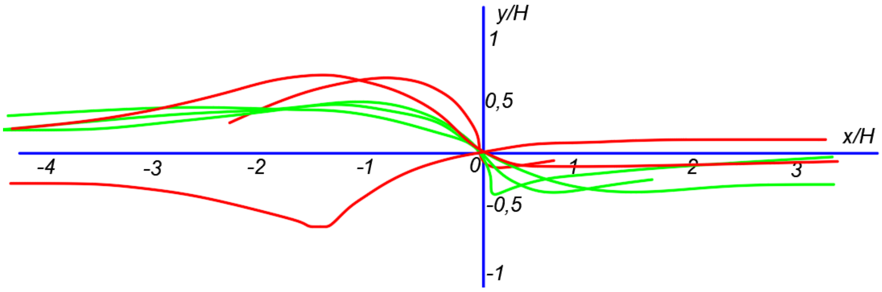


Рис. 2. Несимметричные границы полубесконечных областей в относительных координатах

При оценке устойчивости бортов карьера использован подход, известный как метод перемещений. В этом случае метод эквивалентен минимизации полной потенциальной энергии системы (борта карьера), выраженной через поле перемещений.

Для определения напряженно-деформированного состояния массива и оценки устойчивости уступов с помощью МКЭ необходимо выдержать следующую последовательность проведения расчетов:

– назначение узлов, в которых определяются перемещения, и разбиение сечения борта карьера на конечные элементы;

– определение зависимости между усилиями и перемещениями в узлах элемента, т.е. построение матриц жесткости;

– сопоставление системы алгебраических уравнений равновесия (сборка);

– решение системы уравнений;

– определение перемещений и компонентов напряженно-деформированного состояния борта карьера и оценка его устойчивости.

Однако данный метод имеет ряд недостатков, основным из которых является большой объем вычислений, резко возрастающий по мере увеличения глубины открытых работ.

Наиболее удобным методом расчета поля напряжений для областей со сложным контуром – метод интегральных уравнений (ИУ) [15], включающий решение системы интегральных уравнений Фредгольма.

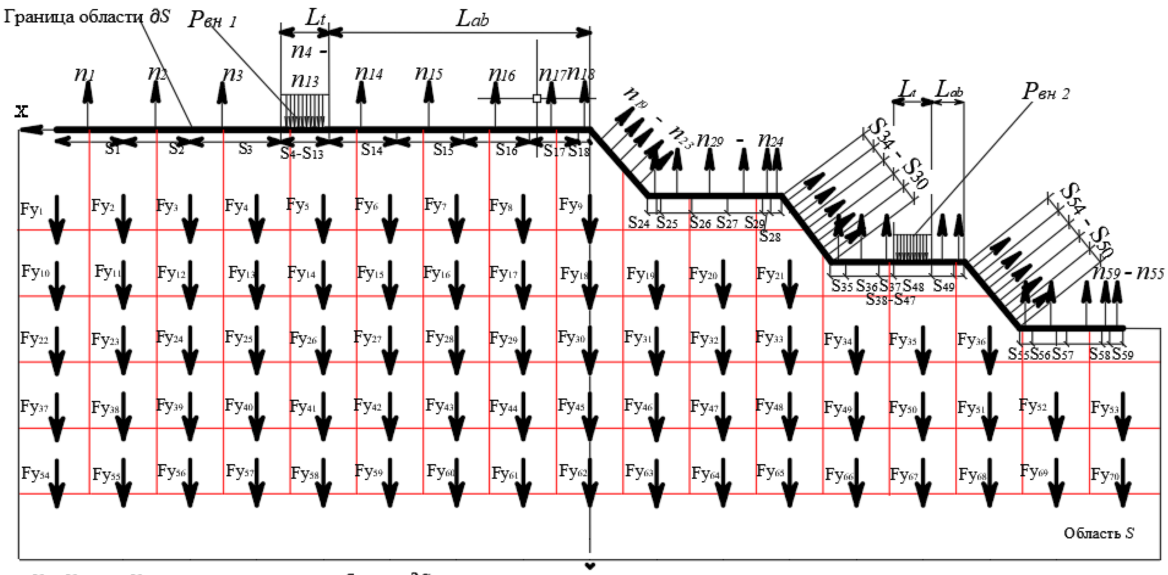
При решении рассматриваемой задачи этот подход имеет определенные преимущества перед методом конечных разностей или конечных элементов, так как в качестве неизвестного вектора выбирается вектор фиктивных нагрузок. Если его значения известны, то поля напряжений и перемещений внутри тела определяются явным образом и достаточно точно при помощи интегрирования распределения фиктивных нагрузок [16].

К положительным качествам этого метода относятся:

– уменьшение размерности задачи;

– в отличие от метода конечных элементов, дискретизируется только граница области S.

Рассмотрим метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) и алгоритм вычисления напряжений в массиве. В методе ГИУ рассматривается пространство (полупространство), в котором граница контура разбивается дискретно на конечное число участков. На рис. 3 представлена расчетная схема, а на рис. 4 расчетная блок-схема обозначения определяемых граничных условий и объемных сил.



$n_1, n_2, \ldots, n_j$ – нормали к границе области ∂S;

$S_1, S_2, \ldots, S_i$ – длина отрезка границы ∂S;

$P_{вн1}, P_{вн2}, \ldots, P_{вн\,i}$ – внешние нагрузки от отвалов и оборудования, приложенные на длине L_t на расстоянии L_{ab} от края уступа;

$Fy_1, Fy_2, \ldots, Fy_i$ – составляющие силы тяжести в i-й точке области S.

Рис. 3. Расчетная схема конструкции бортов и вычисления напряжений в массиве горных пород карьера Кокпатас

При решении задачи теории упругости условия на границе определяются так

$$\int_{\partial s} \overline{k_{ij,l}}(\Omega,\tau)P_l \cdot n_j(\Omega)\; dS(\tau) = \sigma_i^0(\Omega); \quad \Omega,\tau \in \partial S \quad (6)$$

где n_i – конус угла между нормалью к участку границы и осями координат; $\sigma_i^o(\Omega)$ – заданные нагрузки на ∂S.

Напряжения в области S, вызванные действием сосредоточенных на контуре ∂S усилий в бесконечной полуплоскости, представимы в виде

$$k_{xx,l} \cdot P_l^s = -\left[p_x^s r_x\left(b_1 r_x^2 + b_2 r_y^2\right) + p_y^s r_y\left(b_3 r_x^2 - b_2 r_y^2\right)\right],$$
$$k_{yy,l} \cdot P_l^s = -\left[p_x^s r_x\left(b_3 r_y^2 - b_2 r_x^2\right) + p_y^s r_y\left(b_1 r_y^2 + b_2 r_x^2\right)\right],$$
$$k_{xy,l} \cdot P_l^s = -\left[p_x^s r_y\left(b_1 r_x^2 + b_2 r_y^2\right) + p_y^s r_x\left(b_2 r_x^2 + b_1 r_y^2\right)\right]$$

где p_x^s, p_y^s – составляющие фиктивных нагрузок внутри области S; r_x, r_y, – x, y – компоненты радиуса вектора, проведенного от точки на ∂S к точке в S:

$$b_1 = 3 + \frac{\nu}{1-\nu}; \qquad b_2 = 2 - \frac{1}{1-\nu}; \qquad b_3 = 1 + \frac{3\nu}{1-\nu};$$

где ν – коэффициент Пуассона.

При $\tau \to \Omega$ выражение (6) имеет особенность, для выделения которой используется подход, заключающийся в рассмотрении нового контура, обходящего точку границы, где $\tau = \Omega$. При этом

$$\int_{\partial s} k_{ij,l}(\Omega,\tau)P_l \cdot n_j(\Omega)\; dS(\tau) = \lim_{\substack{\Delta\partial s\to 0\\ a\to 0}}\left[\left(\int_{\partial s-\Delta\partial s} k_{ij,l}(\Omega,\tau)P_l \cdot n_j(\Omega)dS(\tau)\right) + \left(\int_{\partial s} k_{ij,l}(\Omega,\tau)P_l \cdot n_j(\Omega)dS(\tau)\right)\right] \quad (8)$$

В работе [16] показано, что

$$\lim_{a\to 0} \int_{\partial s} k_{ij,l}(\Omega,\tau)P_l \cdot n_j(\Omega)ds(\tau) \to P_x^s/2, P_y^s/2. \quad (9)$$

Тогда на основании соотношения (9) уравнение (6) имеет окончательный вид

$$P_i^s/2 + \int_{\partial s} k_{ij,l}(\Omega,\tau)P_l \cdot n_j(\Omega)dS(\tau) = \sigma_i^o(\Omega), \quad i = x, y. \quad (10)$$

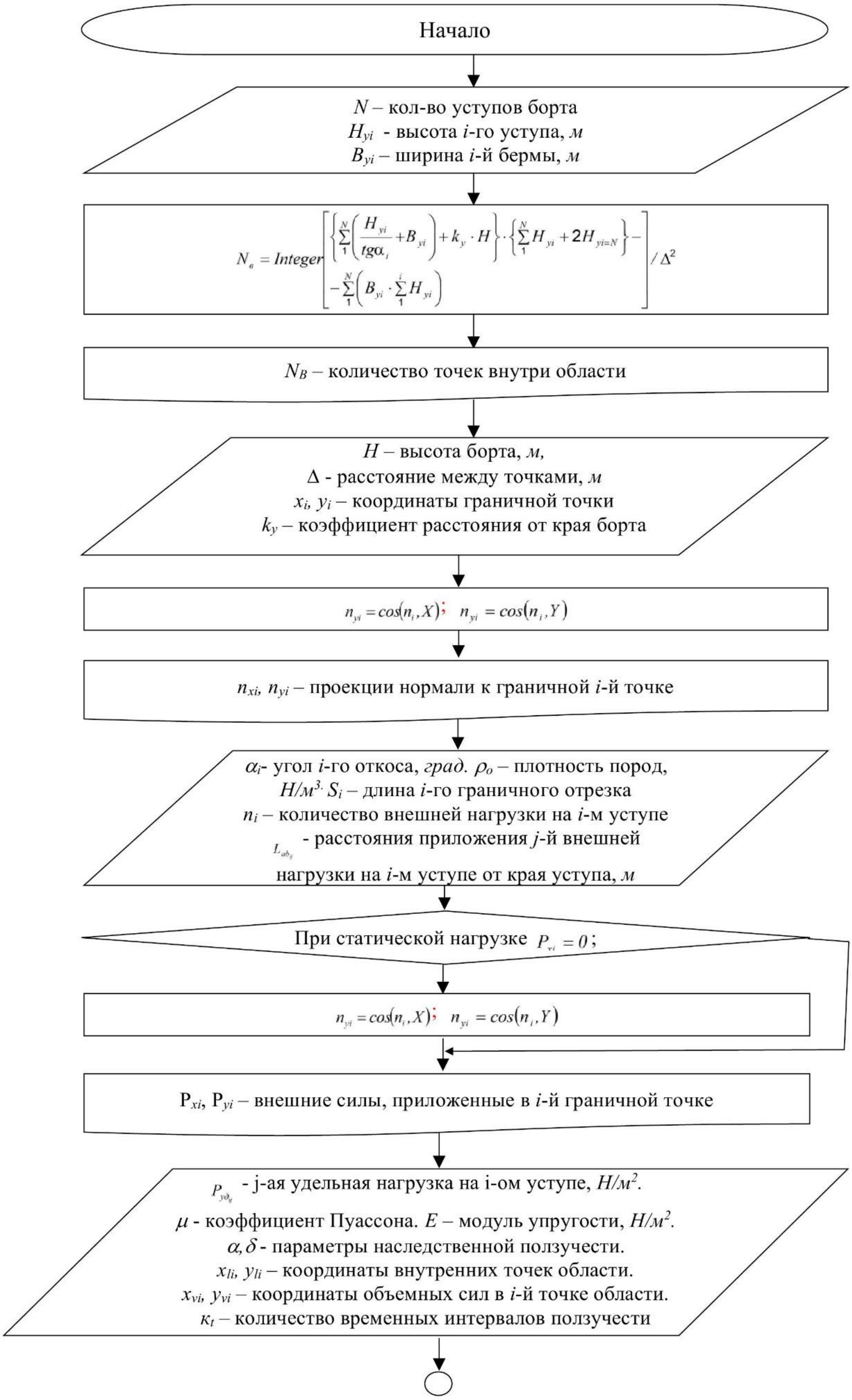
Для численной реализации метода границу области ∂s разбиваем на N отрезков произвольной длины ∂S_i. Затем в средних точках каждого отрезка ∂S_i определяем результирующие граничные значения

$$P_{xi}^S = \int_{\Delta s_i} p_x^s dS; \;\; P_{yi}^S = \int_{\Delta s_i} p_y^s dS; \;\; P_{xi}^{\partial S} = \int_{\Delta s_i} p_x^{\partial S} dS; \;\; P_{yi}^{\partial S} = \int_{\Delta s_i} p_y^{\partial S} dS, \quad (11)$$

где с – составляющие фиктивных нагрузок на границе области ∂S.

Используя численный метод трапеции вычисления интеграла и формулы (11), можно численно аппроксимировать выражения (10):

Исходные данные для расчета и формируемые граничные условия



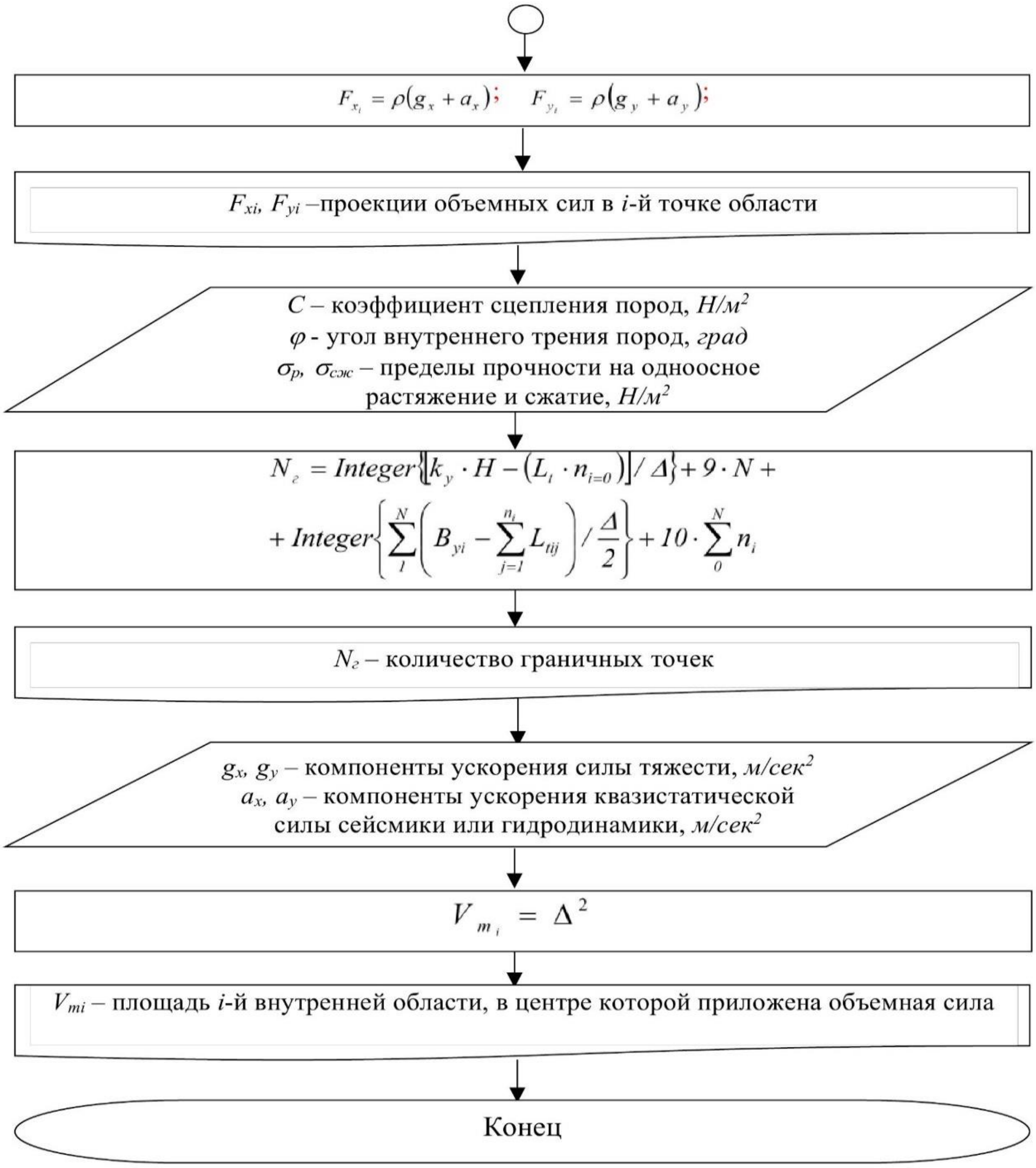


Рис. 4. Блок-схема расчёта параметров конструкции бортов и вычисления напряжений в массиве горных пород карьера Кокпатас

$$P_{xi}^S/2 - 1/(4\pi)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\left[\begin{matrix}\left(b_1 r_{xij}^3 n_{xi} + b_2 r_{xij} r_{yij} n_{xi} + b_1 r_{xij}^2 r_{yij} n_{yi} + b_2 r_{yij}^3 n_{\dots}\right) \\ +\left(b_3 r_{xij}^2 r_{yij} n_{xi} - b_2 r_{yij}^3 n_{xi} + b_2 r_{xij}^3 n_{yi} + b_1 r_{xij} r_{yij}^2 n_{yi}\right)\cdot P_{yj}^S\end{matrix}\right] \Delta S_i (r_{xij}^2 + r_{yij}^2)^{-2} = P_{xi}^{\partial S} \qquad (12)$$

$$P_{yi}^S/2 - 1/(4\pi)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\left[\begin{matrix}\left(b_1 r_{xij}^2 r_{yij} n_{xi} + b_2 r_{yij}^3 n_{xi} + b_3 r_{xij} r_{yij}^2 n_{yi} - b_2 r_{xij}^3 n_{\dots}\right) \\ +\left(b_2 r_{xij} n_{xi} + b_1 r_{xij} r_{yij}^2 n_{xi} + b_1 r_{yij}^3 n_{yi} + b_2 r_{xij}^2 \dots\right)\end{matrix}\right] \Delta S_i (r_{xij}^2 + r_{yij}^2)^{-2} = P_{yi}^{\partial S}. \qquad (13)$$

После вычисления фиктивных нагрузок P_{xi}^S и P_{yi}^S ($j = \overline{1, N}$) компоненты напряжений в области S находятся из следующих соотношений

$$\sigma_{xi} = -1/(4\pi)\sum_{j=1}^{N}\left[P_{xj}^S r_{xij}\left(b_1 r_{xij}^2 + b_2 r_{yij}^2\right) + P_{yj}^S r_{yij}\left(b_3 r_{xij}^2 - b_2 r_{yij}^2\right)\right]\cdot\left(r_{xij}^2 + r_{yij}^2\right)^{-2} \qquad (14)$$

$$\tau_{xi} = -1/(4\pi)\sum_{j=1}^{N}\left[P_{xj}^S r_{yij}\left(b_1 r_{xij}^2 + b_2 r_{yij}^2\right) + P_{yj}^S r_{xij}\left(b_2 r_{xij}^2 + b_1 r_{yij}^2\right)\right]\cdot\left(r_{xij}^2 + r_{yij}^2\right)^{-2}. \qquad (15)$$

Используя выражения (14–15), можно определить напряжения во всех точках массива, что особенно важно при исследовании областей его разупрочнения

При исследовании напряженного состояния прибортового горного массива и его деформирования данная область моделируется полуплоскостью, по границе которой действуют нагрузки, а внутри полуплоскость имеет блочную структуру.

После формализации границы области и ее внутренней части при наличии внешних сил на границах области они также описываются в виде распределенной или точечной нагрузки в аналитическом виде.

Затем на основании выражений (12) и (13) граничные интегральные уравнения формируются в виде матриц

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11}\ldots a_{1n} b_{11}\ldots b_{1n} \\ a_{n1}\ldots a_{nn} b_{1n}\ldots b_{nn} \\ c_{11}\ldots c_{1n} d_{11}\ldots d_{1n} \\ c_{n1}\ldots c_{nn} d_{n1}\ldots d_{nn} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Правые части уравнений (12) и (13) представляют собой граничные условия на отрезках ∂S_i. В соответствии с [17] для учета гравитационного поля и возникающих внутри массива нагрузок (например, взрывное или сейсмическое воздействие) правая часть уравнений дополняется интегралами, описывающими эти воздействия. Тогда выражение (10) будет иметь вид

$$P_i^s/2 + \int_{\partial s} k_{ij,l}(\Omega,\tau) P_l \cdot n_j(\Omega) dS(\tau) = \sigma_i^o(\Omega) + \int_v K_{ij}(\tau,t) \cdot P_i(t)\mathrm{dv}, \quad i = x, y \quad (17)$$

где $K_{ij}(\tau,t)$ – функция Грина; $P_i(t)$ – усилия, возникающие в i-й точке области S.

Для решения полученной системы линейных уравнений используется итерация по методу Гаусса или Зейделя [18].

После вычисления по выражениям (14-16) компонентов тензора напряжений σ_x, σ_y и τ_{xy} определяются главные напряжения по известным выражениям

$$\sigma_1 = (\sigma_x + \sigma_y)/2 + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2/4 + \tau_{xy}} \; \sigma_2 = (\sigma_x + \sigma_y)/2 - \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2/4 + \tau_{xy}} \; \tau(\sigma_1 - \sigma_2)/2_{max} \quad (18)$$

Таким образом, разработаны модель и метод расчета напряженно-деформированного состояния массива горных пород для условий месторождения Кокпатас, в результате которых обоснованы симметричные границы полубесконечных областей в относительных координатах и несимметричные границы полубесконечных областей в относительных координатах.

Список использованной литературы

1. *Рыбин В.В. Развитие теории геомеханического обоснования рациональных конструкций бортов карьеров в скальных тектонически напряженных породах // Дисс. … докт. техн. наук. – Апатиты, 2016. – 385 с.*

2. *Демин А.М. Устойчивость открытых горных выработок и отвалов. – М.: Недра, 1973. – 232 с.*

3. *Копач П.И., Краснопольский И.А., Полищук С.З., Шапарь А.Г. Управление состоянием массивов на открытых разработках. – Киев: Наукова думка, 1988. – 288 с.*

4. *Ильин А.И., Гальперин А.М., Стрельцов В.И. Управление долговременной устойчивостью откосов на карьерах. – М.: Недра, 1985. – 248 с.*

5. *Барон Л.И. Коэффициенты крепости горных пород. – М.: Наука, 1972. – 176 с.*

6. *Распределение и корреляция показателей физических свойств горных пород: Справочное пособие / М.М. Протодьяконов, Р.И.Тедер, Е.И.Ильницкая и др. – М.: Недра, 1981. – 190 с.*

7. *Бунин Ж.В., Нутфуллаев Г.С., Норов Ю.Д., Заиров Ш.Ш. Определение глубины разрушения крепкого пропластка в массиве разнопрочных горных пород зарядом взрывчатых веществ с кумулятивным эффектом // Взрывное дело. – Москва, 2015. – №113/70. – С. 133-141.*

8. *Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Основные уравнения. Плоская теория упругости. Кручение и изгиб. – М.: Наука, 1966. – 707 с.*

9. *Угодчиков А.Г., Длугач М.И., Степанов А.Е. Решение краевых задач плоской теории упругости на цифровых и аналоговых машинах. – М.: Высшая школа, 1970. – 528 с.*

10. *Мамедов Ю.М., Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. Построение конформно-отображающих функций для областей сложной конфигурации методом вариации границ // Изв. АН СССР МТТ, 1979. – №4. – С. 189-190.*

11. *Цытович Н.А., Тер-Мартиросян З.Г. Основы прикладной геомеханики в строительстве. – М.: Высшая школа, 1981. – 317 с.*

12. *Фадеев А.Б. Метод конечных элементов в геомеханике. М.: Недра, 1987. – 221 с.*

13. *Ержанов Ж.С., Каримбиев Т.Д. Метод конечных элементов в задачах механики горных пород. – Алма-Ата: Наука, 1979. – 241 с.*

14. *Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 238 с.*

15. *Силкин А.А., Кольцов В.Н. Применение метода интегральных уравнений для оценки напряженного состояния уступов и бортов // Горный вестник Узбекистана. – Навои, 2000. – №2. – С. 68-70.*

16. *Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 494 с.*

17. *Силкин А.А., Кольцов В.Н. Геомеханический анализ и системы контроля деформации бортов карьера Мурунтау // Горный вестник Узбекистана. – Навои, 2002. – №4. – С. 17-22.*

18. *Гутер Р.С., Овчинский Б.В. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. – М.: Наука, 1970. – 434 с.*