DOI: 10.24412/2181-144X-2026-1-150-155

Пиримов А., Турсинбоева З.У., Ибрагимова Ш.

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ПОЛЕЙ

Пиримов Акрам *1[0009-0000-6226-7251]*, ***Турсинбоева Зебо*** *2[0009-0006-6979-4429]*, ***Ибрагимова Шахзода.*** *3[0009-0006-2219-7598]*

[1]Навоийский государственный горно-технологический университет, доцент, E-mail: pirimovakram615@gmail.com
[2]Навоийский государственный горно-технологический университет, Старший преподаватель, E-mail: ztursinboyeva@gmail.com
[3]Навоийский государственный горно-технологический университет, студент, E-mail: shahzodaibragimova03@gmail.com

Аннотация: В этой статье рассматривается теории полей, основные группы поля, функция поля и некоторые практические применения. Теория полей позволяют наглядно и строго описывать физические величины, имеющие направление и величину в каждой точке пространств. Основная цель статьи раскрыть применение теории полей.
Ключевые слова: теория полей, векторные поля, скалярные поля, направлении вектора, градиент, производная по направлению, программа MATLAB.

Abstract: This article discusses field theories, basic field groups, field functions, and some practical applications. Field theories provide a clear and rigorous description of physical quantities that have direction and magnitude at every point in space. The main goal of this article is to explore the applications of field theories.
Keywords: field theory, vector fields, scalar fields, vector direction, gradient, directional derivative, MATLAB program.

Annotatsiya: Ushbu maqolada maydonlar nazariyasi, maydonlarning asosiy turlari, maydon vazifasi va ba’zi amaliy qo‘llanmalar ko‘rib chiqiladi. Maydonlar nazariyasi fazoning har bir nuqtasida yo’nalish va kattalikka ega bo’lgan fizik kattaliklarni aniq va qat’iy tasvirlash imkonini beradi. Maqolaning asosiy maqsadi maydonlar nazariyasi qo‘llanilishini ochib berishdir.
Kalit so’zlar: maydonlar nazariyasi, vektor maydonlari, skalyar maydonlari, vektor yo’nalishi, gradient, yo’nalish bo’yicha hosila, MATLAB dasturi.

Введение

Теория полей является одной из самых важнейших направление математики представляющий собой мощный инструмент для изучения алгебраических структур. Она охватывает широкий спектр тем, начиная от чисел и заканчивая более сложными объектами, такими как многочлены и векторные пространства.

Решая многие инженерные задачи, специалисты сталкиваются с необходимостью изучать структуру физического поля и его влияние на материальные объекты. Один из фундаментальных разделов современной алгебры - теория полей, глубокие идеи которой пронизывают практически всю математику и находят широкое применение в естественных науках и технике. К ней обращаются и в прикладных задачах: например, при создании оборудования для пищевой промышленности необходимо исследовать движение жидкостей и газов в каналах и резервуарах, а такие потоки описываются физическими полями.

Основная часть

Всякое физическое поле — это, по сути, та или иная характеристика среды, заполняющей некоторую область пространства, где имеют место определённые процессы. От природы этой среды зависят размерность единиц измерения и константы, через которые строятся количественные соотношения. По своей структуре поля бывают двух основных типов: скалярные и векторные.

В основе многих дисциплин - от классической физики до современных компьютерных технологий - лежат векторные поля, служащие универсальным языком для описания изменяющихся в пространстве направленных величин. Таким полям соответствуют многомерные величины; примером служит электромагнитное поле, которое описывается двумя векторными величинами (электрической и магнитной индукцией). При этом физической средой всегда является вещество либо вакуум, заполняющие определённую область пространства.

Если физический процесс, происходящий в среде поля, описывается скалярной величиной (температурой, давлением и т.п.), то такое поле называют скалярным. Подобным полям свойственны одномерные величины, измеряемые по одной шкале; типичные примеры — поля температур и давлений в атмосфере Земли или других планет, а также поля гравитационного и электрического потенциала. Скалярное поле определяется скалярной функцией $U = f(M), M \in V$. В трехмерном пространстве функция поля $U = f(x,y,z)$ где x,y,z – координаты точки M. Если поле изменяется со временем t, то $U = f(t,x,y,z)$. Поле, не зависящее от времени, называется стационарным, в противном случае - нестационарным. Обычно предполагается, что функция поля непрерывна и имеет непрерывные частные производные. Геометрическое место точек $U(x,y,z) = C$ где $C = const$, называется поверхностью уровня [1, 2].

Пример: Найти производную функции $u = xyz$ в точке $M(-1;2;4)$, по направлению вектора $\overline{MM_1}$, где $M_1(-3;4;5)$.

Решение: находим координаты вектора $\overline{MM_1}$, $\overline{MM_1} = \overline{MM_1}((-3+1),(4-2),(5-4)) = -2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$

Вычисляем координаты соответствующего единичного вектора:

$$\bar{e}_0 = \frac{\overline{MM_1}}{|\overline{MM_1}|} = \frac{-2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2}} = -\frac{2}{3}\bar{i} + \frac{2}{3}\bar{j} + \frac{1}{3}\bar{k}$$

Направляющие косинусы единичного вектора $\bar{e}_0$, следующий имеет вид:

$$\cos\alpha = -\frac{2}{3}, \quad \cos\beta = \frac{2}{3}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{3}$$

Находим частные производные функции $u = xyz$: $\frac{\partial u}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xz$

их значения в точке $M(-1;2;4)$: $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 8, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = -4, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = -2$

Производная по направлении вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\cos\gamma \tag{1}$$

Подставляя найденные значения в формуле (1), найдём производную по направлению:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = 8\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) - 4\cdot\frac{2}{3} - 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}(-8-4-1) = -\frac{26}{3}$$

Знак (-) означает что, функция $u = xyz$ убывает по направления вектора $\overline{MM_1}$ [3].

Это задача имеет важное практическое и теоретическое значение. Она позволяет узнать, как быстро изменяется функция при движении из заданной точки в заданном направлении.

Эту задачу можно решить с помощью прикладной программы Matlab. На рисунке (Рис. 1) отображен решение задачи в программе.

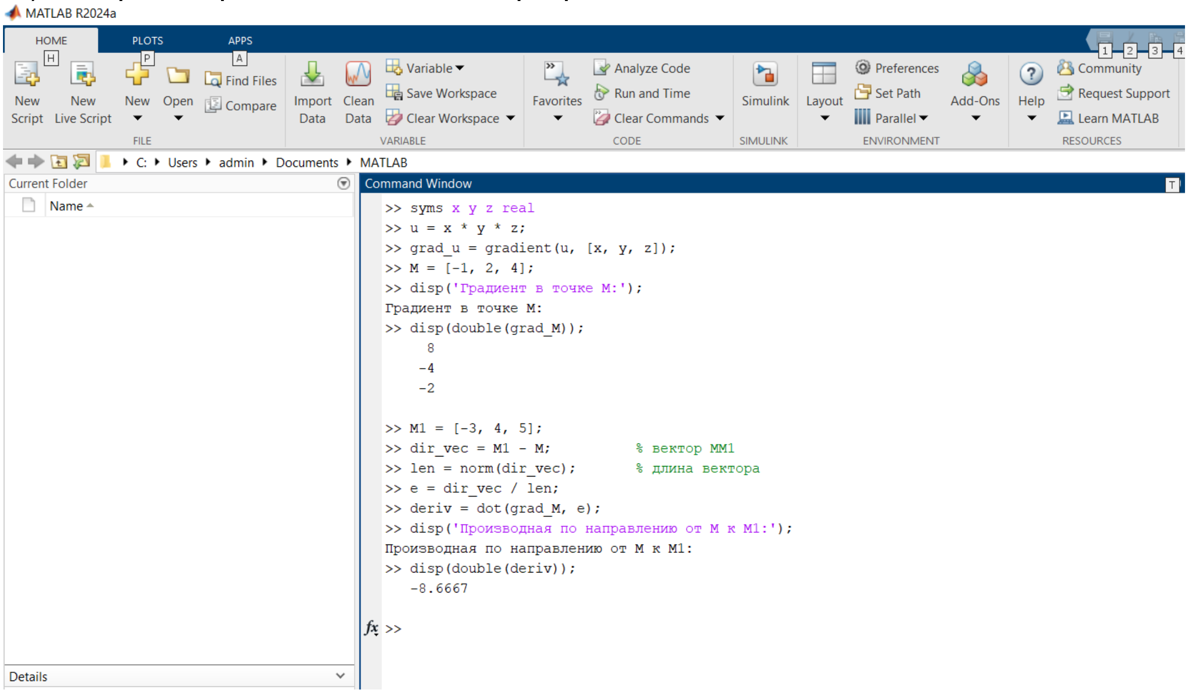

Рис 1. Решение в программе Matlab

Пример: найти градиент функции $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в точке $M(x; y; z)$

Решение: вычислим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{u};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{y}{u};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{z}{u}.$$

На основании формулы $grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$ градиент скалярной функции в точке $M(x; y; z)$ будет: $grad u = \frac{x}{u}\bar{i} + \frac{y}{u}\bar{j} + \frac{z}{u}\bar{k}$

Наибольший скорость возрастания функции {u} будет равно 1, т.е.

$$grad u = \sqrt{\frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{u^2} + \frac{z^2}{u^2}} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{u^2}} = \frac{u}{u} = 1$$

Пример: найти проекция градиента функции в точке $M(1;2)$ $F(x,y)=x^2-2xy+3y-1$

Решение: вычислим частные производные и их значения в данной точке:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x-2y; \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=-2x+3;$$

Подставляя

$$x=1; \qquad y=2;$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right| M=(2x-2y)_{\substack{x=1\\y=2}}=-2;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}_{\substack{x=1\\y=2}}=(-2x+3)_{\substack{x=1\\y=2}}=1;$$

По определение градиента имеем

$$gradF_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{\partial F}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\bar{j}_{\substack{x=1\\y=2}}=-2\bar{i}+\bar{j}$$

Таким образом, градиент в точке $M(1;2)$ равен: $\{-2,1\}$.

На рисунке (Рис. 2) отображен решение задачи в программе Matlab.

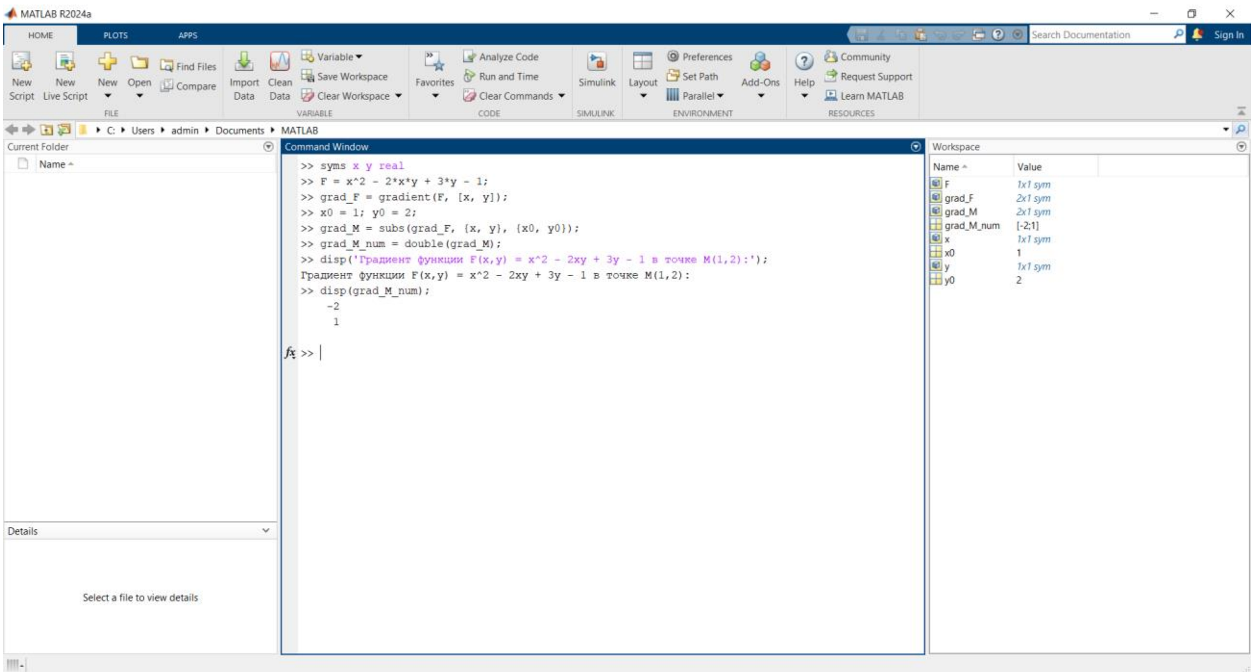

Рис 2. Решение в программе Matlab

Заключение

Проведённое рассмотрение различных примеров использования полей позволяет утверждать, что универсальность этого понятия обусловлена его центральным положением в алгебраической иерархии: с одной стороны, поля являются естественным окружением для решения уравнений, с другой служат основой для построения новых алгебраических структур. В алгебраической геометрии поля функций и понятие поля частных позволяют единообразно описывать геометрические объекты над произвольными полями. Таким образом, многообразие рассмотренных применений подтверждает, что теория полей является не только стройной математической дисциплиной, но и незаменимым инструментом для решения как сугубо теоретических задач, так и прикладных проблем современной науки.

Список использованных литератур:

[1]. Иванов А. Б., Молчанов Ю. С., Тестов Ю. Н. Высшая математика. Элементы теории поля. Методические указания для студентов инженерных специальностей всех форм обучения. – СПб.: СПбГУНиПТ, 2010. – 32 с.

[2]. Л.И. Терехина, И.И. Фикс Высшая математика Часть 3. Томск, 2002г.

[3]. Salohiddinov M. Matematik fizika tenglamalari. “O’zbekiston” nashriyoti. T. 2002 y.