Journal of Advances in Engineering Technology

УДК 531.01:629.78

Коршуова Н.А., Рузматов М., Манглиева Ж.Х., Ибрагимов А.Д.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ УЧАСТКОВ МАЛОЙ ТЯГИ В ЦЕНТРАЛЬНОМ НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ

Коршунова Наталья Александровна – доктор физико-математических наук, профессор Национального университета Узбекистана, г. Ташкент, Узбекистан, bea40371@rambler.ru, **Рузматов Максуд**– старший преподаватель Национального университета Узбекистана,г. Ташкент, Узбекистан, mexanik1123@rambler.ru, **Манглиева Журагул Хамрокуловна –** кандидат физико-математических наук, доцент Навоийского государственного горного института, г. Навои, Узбекистан, manglieva67@mail.ru, **Ибрагимов Алишер Давлатович** – студент Марийского государственного университета, г. Казань, Татарстан

Аннотация: *целью исследований являлось выявление существующей проблемы при оптимизации движения точки переменной массы (центр масс космического аппарата - КА) в гравитационном поле. Она включает в себя выбор, прогнозирование, оптимизацию и расчет траекторий управляемых объектов. Вариационная задача в постановке Лоудена заключается, в определении управлений (величина и направление реактивной силы) и оптимальных траекторий точки, движущейся с ограниченным секундным расходом массы m. Конечный результат вариационной задачи, в определении управлений - величина и направление силы тяги, переводящей точку из заданного положения в некоторое конечное, а также минимизирует расход массы. В данной работе аналитические решения вариационной задачи отличаются от решений: спирали Лоудена отличаются законом изменения массы (малая тяга), а следовательно, значениями параметров и характеристиками двигателя. Полученные траектории могут найти применение в задачах ухода и маневрах перехода с орбиты на орбиту*

Ключевые слова: оптимизация; гравитационное поле; изменения массы; вариационные задачи; спирали Лоудена, стабилизация, Гамильтонова система, реактивная сила.

Аннотация: *tadqiqotning maqsadi o'zgaruvchan massa nuqtasining (kosmik kemaning massa markazi - SC) tortishish maydonidagi harakatini optimallashtirishda mavjud bo'lgan muammoni aniqlash edi. Bunga boshqariladigan ob'ektlarning traektoriyalarini tanlash, bashorat qilish, optimallashtirish va hisoblash kiradi. Lowden formulasiyasidagi variatsion muammo boshqaruv elementlarini (reaktiv kuchning kattaligi va yo'nalishini) va cheklangan massa m tezligi bilan harakatlanadigan nuqtaning optimal traektoriyalarini aniqlashdan iborat. Variatsion muammoning yakuniy natijasi, boshqaruv elementlarining ta'rifida, tortishish kuchining kattaligi va yo'nalishi bo'lib, u bir nuqtani ma'lum bir pozitsiyadan ma'lum bir yakuniy holatga o'tkazadi, shuningdek massa sarfini minimallashtiradi. Ushbu maqolada variatsion muammoning analitik echimlari Lovden spirallari massa o'zgarishi qonuni (past surish), va shuning uchun dvigatelning parametrlari va xususiyatlarining qiymatlari echimlardan farq qiladi.Natijada paydo bo'lgan traektoriyalar qochish va orbitadan orbitaga o'tish manevralari muammolarini qo'llashi mumkin.*

Kalit so'zlar: optimallashtirish; tortishish maydoni; o'zgaruvchan massa; variatsion masalalar; Lowden spirallari, stabilizatsiyasi, Gamilton sistemasi, reaktiv kuch.

Abstract: *the aim of the research was to identify the existing problem in optimizing the movement of a point of variable mass (the center of mass of the spacecraft - SC) in a gravitational field. It includes the selection, forecasting, optimization and calculation of trajectories of managed objects. The following are some of their recent results. The variational problem in the formulation of Louden is to determine the controls (magnitude and direction of the reactive force) and the optimal trajectories of a point moving with a limited second mass flow rate m.The end result of the variational problem, in the definition of controls, is the magnitude and direction of the traction force that transfers a point from a given position to a certain final one, and also minimizes the mass consumption. In this work, the analytical solutions of the variational problem differ from the solutions: Lowden spirals differ in the law of mass change (low thrust), and, consequently, in the values of the parameters and characteristics of the engine. The resulting trajectories can find application in problems of escape and maneuvers of transition from orbit to orbit.*

Keywords: optimization gravitational field mass changes variational problems Lowden spirals stabilization,point motion, gravitational field, Hamiltonian system, reactivating force, analytical mechanics.

Существует проблема оптимизации движения точки (центр масс космического аппарата - КА) в гравитационном поле. Вариационная задача заключается в определении управлений - величина и направление силы тяги, переводящей точку из заданного положения в некоторое конечное, минимизируя расход массы.

Дифференциальные уравнения вариационной задачи в случае центрального ньютоновского поля можно записать в следующем виде [1,2]

$$\dot{\vec{\upsilon}} = \frac{2P}{cm}\frac{\vec{\lambda}}{\lambda} - \frac{\mu}{r^3}\vec{r}\,;$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\upsilon}\,;$$

$$\dot{M} = -\frac{2P}{c^2}\,;$$

$$\dot{\vec{\lambda}} = -\vec{\lambda}_r ; \qquad (1)$$

$$\dot{\vec{\lambda}}_r = \frac{\mu}{r^3}\vec{\lambda} - \frac{3\mu}{r^5}(\vec{r}\cdot\vec{\lambda})\vec{r} ;$$

$$\dot{\lambda}_M = \frac{2P}{cM^2}\lambda .$$

где $\vec{\upsilon}, \vec{r}$, $M(t)$ - скорость, радиус-вектор и масса точки; $\vec{\lambda}, \vec{\lambda}_r, \lambda_M$ - множители Лагранжа, сопряженные $\vec{\upsilon}, \vec{r}$ и M соответственно; μ - гравитационный параметр центра притяжения; m -секундный расход массы, $0 \le m \le \tilde{m}$; P - мощность реактивной струи

$$P = \frac{1}{2}mc^2$$

В отличие от задачи в постановке Лоудена [1,3,4] будем считать, что относительная скорость истечения продуктов сгорания c может быть переменной $c_{\min} \le c(t) \le c_{\max}$, то есть появляются новые уравнения связей

$$P(P_{\max} - P) - \alpha^2 = 0 ,$$

$$(c_{\max} - c)(c - c_{\min}) - \beta^2 = 0$$

Эти связи характеризуют системы с малой и с большой тягой, тем самым обобщая задачу Лоудена на случай участков малой тяги [1,5].

Система (1) гамильтоновая с гамильтонианом

$$H = \vec{\lambda}\left(\frac{2P}{cm}\frac{\vec{\lambda}}{\lambda} - \frac{\mu}{r^3}\vec{r}\right) + \vec{\lambda}_r\vec{\upsilon} - \frac{2P}{c^2}\lambda_M$$

Рассмотрим участки малой тяги. В этом случае должны выполняться условия [2,5]

$$P = P_{\max}, \quad \frac{\lambda}{2M}c - \lambda_M = 0$$

и имеют место следующие интегралы и соотношения [1,4,5]

$$\lambda_M M^2 = b, \quad 2b = cM\lambda , \quad \lambda^2 = const \qquad (2)$$

$$-\frac{\mu}{r^3}\vec{r}\vec{\lambda} + \vec{\lambda}_r\vec{\upsilon} + \frac{P}{2b}\lambda^2 = h , \qquad (3)$$

$$\vec{\lambda}\vec{v} - 2\vec{r}\vec{\lambda}_r - 5\frac{P}{2b}\int \lambda^2 dt = -3ht + C_1 . \qquad (4)$$

Рассмотрим плоский случай, когда участок малой тяги лежит в плоскости, проходящей через центр тяготения. Уравнения (1) в полярных координатах r, φ примут с учетом (2) следующий вид:

$$\dot{v}_1 = \frac{P}{b}\lambda_1 - \frac{\mu}{r^2} + \frac{v_2^2}{r}, \quad \dot{v}_2 = \frac{P}{b}\lambda_2 - \frac{v_1 v_2}{r},$$

$$\dot{r} = v_1, \quad \dot{\varphi} = \frac{v_2}{r}, \quad \dot{M} = -\frac{P}{2b^2}M^2\lambda^2, \qquad (5)$$

$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_2\frac{v_2}{r} - \lambda_4 ,$$

$$\dot{\lambda}_2 = -2\lambda_1\frac{v_2}{r} + \lambda_2\frac{v_1}{r} - \lambda_5\frac{1}{r} ,$$

$$\dot{\lambda}_4 = \lambda_1\left(\frac{v_2^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r^3}\right) - \lambda_2\frac{v_1 v_2}{r^2} + \lambda_5\frac{v_2}{r^2} ,$$

$$\dot{\lambda}_5 = 0 , \quad \dot{\lambda}_M = \frac{P}{bM}\lambda^2 .$$

Будем считать, что время движения и полярный угол φ не фиксированы, функционал не зависит от φ. Тогда $h = 0$, $\lambda_5 = 0$ [1]. Интегралы (3), (4) примут следующий вид

$$\lambda_1(v_2^2 - \frac{\mu}{r}) - \lambda_2 v_1 v_2 + \lambda_4 v_1 r + \frac{P}{2b}\lambda^2 r = 0 \qquad (6)$$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 - 2r\lambda_4 - 5\frac{P}{2b}\lambda^2 t = C_1 \qquad (7)$$

Продифференцируем трижды по времени соотношение $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \lambda^2$. Получим:

$$\lambda_1\lambda_4 r + \lambda_1\lambda_2 v_2 - \lambda_2^2 v_1 = 0 , \qquad (8)$$

$$\lambda_4^2 r^2 + \lambda_1^2 v_2^2 + \lambda_2^2 v_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 v_1 v_2 = (\lambda_2^2 - 2\lambda_1^2)\frac{\mu}{r}$$

(9)

$$3\lambda_4 r - 3\lambda_2 v_2 + 2\lambda_1 v_1 = 0 . \qquad (10)$$

Таким образом, имеем пять уравнений (6)-(10) для определения величин $r, v_1, v_2, \lambda_2, \lambda_4$ как функций радиальной составляющей базис-вектора λ_1.

Найдём λ_4 из (8) $\lambda_4 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 r}(\lambda_2 v_1 - \lambda_1 v_2)$.

Исключим λ_4 из (6) и из (9), получим соответственно

$$(\lambda_1 v_2 - \lambda_2 v_1)^2 = \lambda_1(\lambda_1\frac{\mu}{r} - \frac{P}{2b}\lambda^2 r) ,$$

$$(\lambda_1 v_2 - \lambda_2 v_1)^2 = \frac{\lambda_1^2}{\lambda^2}(\lambda_2^2 - 2\lambda_1^2)\frac{\mu}{r} .$$

Приравняем в двух последних равенствах правые части

$$\lambda_1\frac{\mu}{r} - \frac{P}{2b}\lambda^2 r = \frac{\lambda_1}{\lambda^2}(\lambda_2^2 - 2\lambda_1^2)\frac{\mu}{r} ,$$

получим $r^2 = \dfrac{6b\mu\lambda_1^3}{P\lambda^4}$.

Введём обозначение $a=\frac{6b\mu}{P\lambda^4}$. Здесь a - постоянная величина, $b>0$, то есть $\lambda>0$. Тогда имеем

$$r(\lambda_1)=\pm\lambda_1^{3/2}\sqrt{a}\,. \qquad (11)$$

Расстояние от точки до центра притяжения может как возрастать, так и убывать.

Исключим λ_4 из (7) и из (10), получим систему для определения составляющих скорости v_1, v_2

$$(\lambda_1-\frac{2\lambda_2^2}{\lambda_1})v_1+3\lambda_2 v_2=A(t)\,,$$

$$(\frac{3\lambda_2^2}{\lambda_1}+2\lambda_1)v_1-6\lambda_2 v_2=0\,. \qquad (12)$$

Здесь введено обозначение $A(t)=5\frac{P}{2b}\lambda^2 t+C_1$.

Решая систему (12), получим

$$v_1(\lambda_1,t)=\frac{2\lambda_1}{5\lambda_1^2-\lambda^2}A(t)\,,$$

$$v_2(\lambda_1,t)=\frac{3\lambda^2-\lambda_1^2}{3\lambda_2(5\lambda_1^2-\lambda^2)}A(t) \qquad (13)$$

где $\lambda_2=\pm\sqrt{\lambda^2-\lambda_1^2}$.

Для определения времени движения исключим λ_4 из шестого уравнения системы (5)

$$\dot{\lambda}_1=\frac{\lambda_2}{r}(2v_2-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}v_1)$$

и подставим в полученное равенство значения v_1, v_2, r из (13), (11). Получим

$$\frac{d\lambda_1}{dt}=\pm\frac{4}{3}\frac{\sqrt{\lambda_1}A(t)}{\sqrt{a}(5\lambda_1^2-\lambda^2)}$$

или

$$\frac{3}{4}\frac{\sqrt{a}(5\lambda_1^2-\lambda^2)}{\sqrt{\lambda_1}}d\lambda_1=\pm A(t)dt \qquad (14)$$

Интегрируя (14), найдём зависимость λ_1 от времени

$$\frac{3\sqrt{a}}{2}\sqrt{\lambda_1}(\lambda_1^2-\lambda^2)=5\frac{P}{2b}\lambda^2\frac{t^2}{2}+C_1 t+C_1^*$$

или

$$\frac{3\sqrt{a}}{2}\sqrt{\lambda_1}(n^2-1)=5\frac{P}{4b}t^2+\tilde{C}_1 t+\tilde{C}_1^*\,,$$

здесь

$$n=\frac{\lambda_1}{\lambda}=\cos\alpha\,, \qquad (15)$$

где α - угол, который вектор тяги составляет с радиусом-вектором точки.

Угол $\varphi(\lambda_1)$ определим из четвертого уравнения системы (1) $d\varphi=\frac{v_2}{r}dt$. Исключая dt при помощи (14) и учитывая (11) и (13), получим

$$d\varphi=\pm\frac{(3\lambda^2-\lambda_1^2)}{4\lambda_1^2\sqrt{\lambda^2-\lambda_1^2}}d\lambda_1\,,$$

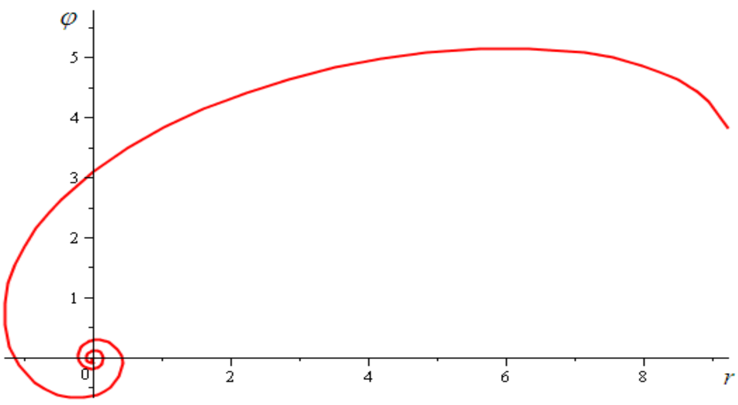
или, интегрируя, будем иметь

$$\varphi=\pm\frac{1}{4}(\frac{3\sqrt{\lambda^2-\lambda_1^2}}{\lambda_1}+\arcsin\frac{\lambda_1}{\lambda})+C_2\,. \qquad (16)$$

Вводя угол α при помощи (15), перепишем (16)

$$\varphi=\pm\frac{1}{4}(3tg\alpha+\arcsin n)+C_2\,.$$

Соотношения (11), (16) образуют параметрическое уравнение активных участков в полярных координатах.



1-рисунок. Зависимость r (км) от φ (рад).

На рис.1 представлена одна из таких спиралей, раскручивающаяся по часовой стрелке. По оси абсцисс откладывается расстояние до центра притяжения. Точка удаляется от центра тяготения с малой тягой.

Найдём закон изменения массы из последнего уравнения системы (1)

$\frac{dM}{dt} = -DM^2$, где введено обозначение

$$D = \frac{P}{2b^2}\lambda^2$$

Таким образом,

$$M(t) = \frac{M_0}{1 + DM_0 t} \quad (17)$$

Масса точки убывает по закону (17).

Полученные в данной работе аналитические решения вариационной задачи отличаются от решений, приведённых в работах [2,5]. От спиралей Лоудена они отличаются законом изменения массы (малая тяга), а следовательно, значениями параметров и характеристиками двигателя. Полученные траектории могут найти применение в задачах ухода и маневрах перехода с орбиты на орбиту.

Литература:

[1].Лоуден Д.Ф. Оптимальные траектории для космической навигации.- М.: Мир. 1966.
[2]. Bishop R.H. and Azimov D.M. Analytical Space Trajectories for Extremal Motion with Low-Thrust Exhaust-Modulated Propulsion // Journal of Spacecraft and Rockets.- Vol.38, № 6, 2001, pp. 897-903.
[3].Azizov A.G.,Korshunova N.A. On an analytical solution of optimum trajectory problem in a gravitational field // Celestial Mech.- 1986.- V.38. № 4.
[4].АзизовА.Г., КоршуноваН.А. Вариационныезадачимеханикикосмическогополета. Учебноепособие.- Ташкент, 1990.
[5]. Azimov Dilmurat M. Analytical Solutions for Extremal Space Trajectories.- Honolulu, Hawaii, 2016.