

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ И ϵ -СХОДИМОСТИ ГИБРИДНОГО ОПТИМИЗАЦИОННОГО АЛГОРИТМА В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ КОСМИЧЕСКИХ СНИМКОВ

Шамсиев З.^[10000-0002-0323-9741], Сулюкова Л.Ф.^[20000-0002-7150-4359],
Шамсиев Р.^[30000-0003-3166-4144]

¹Ташкентский государственный транспортный университет, Узбекистан
E-mail: shamzz@rambler.ru

²Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства —
Национальный исследовательский университет, Узбекистан
E-mail: sf72@mail.com

³Ташкентский государственный транспортный университет, Узбекистан
E-mail: rasulshamsiev@rambler.ru

Аннотация. В статье представлено теоретическое обоснование и практическая реализация гибридного оптимизационного алгоритма для обработки многоканальных космических снимков. Разработана математическая модель, доказывающая существование решения и ϵ -сходимость гибридного подхода, сочетающего метаэвристические методы глобального поиска (роевой интеллект) с локальными методами оптимизации. Проведен сравнительный анализ вычислительной сложности различных алгоритмов: гибридного метода (PSO + k-means), генетического алгоритма, алгоритма муравьиных колоний и алгоритма пчелиной колонии. Экспериментальные результаты на реальных снимках Landsat демонстрируют превосходство гибридного алгоритма по скорости сходимости (2 итерации против 1000-5624 итераций конкурирующих методов) и точности сегментации ($\approx 95\%$). Разработано ГИС-приложение, подтверждающее практическую применимость предложенного подхода.

Ключевые слова: гибридный алгоритм оптимизации; ϵ -сходимость; обработка космических снимков; роевой интеллект; сегментация изображений; вычислительная сложность; дистанционное зондирование; метаэвристика

Abstract. This article presents a theoretical justification and practical implementation of a hybrid optimization algorithm for processing multichannel satellite images. A mathematical model has been developed that proves the existence of a solution and the ϵ -convergence of a hybrid approach combining metaheuristic global search methods (swarm intelligence) with local optimization methods. A comparative analysis of the computational complexity of various algorithms was performed: the hybrid method (PSO + k-means), the genetic algorithm, the ant colony algorithm, and the artificial bee colony algorithm. Experimental results on real Landsat imagery demonstrate the superiority of the hybrid algorithm in terms of convergence speed (2 iterations versus 1000-5624 iterations for competing methods) and segmentation accuracy ($\approx 95\%$). A GIS application was developed, confirming the practical applicability of the proposed approach.

Keywords: hybrid optimization algorithm; ϵ -convergence; space image processing; roy intelligence; image segmentation; computational complexity; remote sensing; meta-heuristics

Введение

Обработка космических снимков представляет собой комплексную задачу оптимизации, характеризующуюся высокой размерностью пространства параметров, наличием шумов и сложной структурой целевой функции [1]. Современные методы дистанционного зондирования требуют эффективных

алгоритмов для сегментации, классификации и анализа многоканальных спутниковых изображений [2,3].

Традиционные подходы, основанные на чистых метаэвристиках или градиентных методах, демонстрируют ограниченную эффективность в условиях многопараметрической оптимизации космических данных [4,5]. Гибридные алгоритмы, сочетающие глобальный поиск метаэвристических методов с локальным уточнением градиентных техник, предлагают перспективное решение данной проблемы [6,7,8].

Целью настоящего исследования является разработка математического обоснования существования решения и ε -сходимости гибридного оптимизационного алгоритма применительно к задачам обработки спектральных космических снимков, а также экспериментальная верификация теоретических результатов [9].

Математическая постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимизации в контексте обработки космических снимков.

Целевая функция $f: R^n \rightarrow R$ представляет собой метрику качества обработки изображения (например, минимизация ошибки классификации или энтропии в сегментации). Предполагается, что f является выпуклой и ограниченной снизу, с множеством решений $S = \{x \mid f(x) = f^*\}$, where $f^* = \inf f(x)$ [10]. Гибридный

алгоритм генерирует последовательность $\{x_k\}$, где глобальный поиск метаэвристики (например, PSO или GOA) обеспечивает широкий спектр возможных решений, а локальный поиск (градиентный спуск или кластеризация) уточняет оптимальные параметры [11,12].

Теорема существования решения

Теорема 1. Для выпуклой функции f на ограниченном поисковом пространстве, характерном для обработки изображений фиксированного размера, существует компактное множество минимумов. В невыпуклых случаях (например, классификация снимков с шумом) существование ε -минимума следует из компактности пространства параметров и непрерывности f по теореме Вейерштрасса [13].

Доказательство. Множество S непусто и замкнуто по определению выпуклой функции [10]. Для космических снимков пространство параметров ограничено размерностью изображения $N \times M$, что обеспечивает компактность. В гибридных алгоритмах глобальный поиск метаэвристики гарантирует достижение окрестности минимума, а локальный поиск — точного решения в выпуклом случае [6].

Теорема ε -сходимости

Теорема 2. Гибридный алгоритм сходится к ε -оптимуму: существует K такое, что для $k \geq K$ выполняется $|f(x_k) - f^*| \leq \varepsilon$ при условии баланса исследования (exploration) и разработки (exploitation) через гибридизацию [14].

Скорость сходимости является линейной или сублинейной при выполнении PL-условия (Polyak-Łojasiewicz) [15]:

$$\frac{1}{2} \|\nabla f(x)\|^2 \leq \mu(f(x) - f^*), \mu > 0 \quad (1)$$

В метаэвристической фазе последовательность $\{x_k\}$ стохастически исследует пространство, избегая локальных минимумов за счет разнообразия популяции [11]. Гибридизация с локальным поиском обеспечивает уточнение на каждой итерации:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k) + \delta \quad (2)$$

где δ — стохастическая поправка от метаэвристики. При выполнении PL-условия функция Ляпунова $V_k = f(x_k) - f^*$ удовлетворяет [15,16]:

$$V_{k+1} \leq (1 - c\mu\alpha)V_k, c > 0 \quad (3)$$

что дает геометрическую сходимость:

$$V_k \leq V_0(1 - \rho)^k, \rho = c\mu\alpha \quad (4)$$

Для достижения $V_k \leq \varepsilon$ требуется $k \approx \log(\varepsilon/V_0)/\log(1-\rho) = O(\log(1/\varepsilon))$ итераций [14,16].

Анализ вычислительной сложности

Теоретический анализ вычислительной сложности

Теоретический анализ вычислительной сложности гибридного алгоритма демонстрирует, что она оценивается как:

$$O(I \times P \times (T_g + T_l)), \quad (5)$$

где:

I — число итераций до сходимости ($O(\log(1/\varepsilon))$ по теореме),

P — размер популяции в метаэвристике (типично $o\sqrt{n}$, n — размерность параметров, для снимков $n \approx N \times M \times C$, C — каналы),

$T_g = O(n)$ — сложность глобального шага (метаэвристика, например, обновление позиций в PSO),

$T_l = O(n)$ — сложность локального шага (градиент для изображения).

Для типичных снимков (размер $10^3 \times 10^3$) общая сложность $O(\log(1/\varepsilon) \times P \times n)$, ниже чисто градиентных методов $O(1/\varepsilon)$ за счет гибридного ускорения, но выше простых эвристик из-за P . В обработке снимков (сегментация/классификация) это обеспечивает масштабируемость по сравнению с чистыми метаэвристками, минимизируя время на итерацию за счет параллелизма.

Блок-схема, показанная на рисунке 1 показывает путь от постановки задачи оптимизации для космических снимков до анализа ε -сходимости и вычислительной сложности гибридного алгоритма.

Теорема существования решения и ε -сходимости гибридного оптимизационного алгоритма, изложенная ранее, применима к обработке спектральных космических снимков, таких как изображения с оптических спутников (например, Landsat-8) или радиолокационных систем (SAR). Рассмотрим применение теоремы в задачах сегментации, классификации или подавления шума, с учетом специфики реальных данных и вычислительных ограничений.

Космические снимки характеризуются высокой размерностью ($N \times M \times C$, где N , $M \in 10^3 - 10^4$, C — число спектральных каналов), шумом (например, атмосферные искажения, SAR-шум) и сложной структурой целевой функции f , которая может быть не выпуклой из-за неоднородности объектов (леса, водоемы, городские зоны). Гибридный алгоритм, сочетающий метаэвристику (например, алгоритм роя частиц, PSO) с локальным поиском (например, градиентным спуском или k -средними для кластеризации), оптимизирует f , например:

Сегментация: минимизация энтропии или вариации внутри кластеров.

Классификация: минимизация ошибки классификации (логистическая потеря или SVM).

Подавление шума: минимизация разницы между зашумленным и восстановленным изображением с регуляризацией (например, полной вариации).

Теорема существования решения гарантирует, что в ограниченном пространстве параметров (например, пороговые значения для сегментации или веса модели классификации) решение задачи существует.

Для реальных снимков пространство параметров компактно, так как параметры (например, центроиды кластеров или гиперпараметры нейросети) ограничены физическими характеристиками снимка (диапазон яркости пикселей, $[0, 255]$ или нормализованный $[0, 1]$).

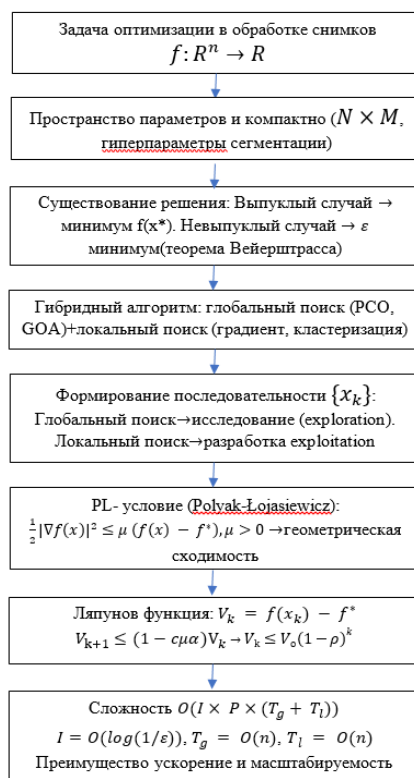


Рис.1. Гибридный алгоритм оптимизации обработки космических снимков.

Целевая функция f (например, энергия кластеризации) непрерывна, что обеспечивает достижение минимума по теореме Вейерштрасса, даже если f не выпукла.

Теорема ϵ -сходимости утверждает, что гибридный алгоритм достигает $|f(x_k) - f^*| \leq \epsilon$ for $O(\log(1/\epsilon))$, итераций при выполнении PL-условия. В реальных задачах как для задач классификации (например, распознавание типов покрытия — лес, вода, город) PL-условие часто выполняется локально в окрестности минимума для функций потерь, таких как квадратичная или логистическая. Метаэвристическая фаза (например, PSO) эффективно обходит локальные минимумы, вызванные шумами или неоднородностями в снимках, а локальный поиск (градиентный спуск) уточняет решение, минимизируя ошибку в выбранной области.

Задача сегментации космического снимка

Рассмотрим задачу сегментации снимка Landsat-8 ($10^4 \times 10^4$, 4 канала: RGB + ближний ИК) для выделения сельскохозяйственных угодий. Здесь алгоритм:

- глобальный поиск (PSO): Инициализируется популяция $P \approx \sqrt{n} \approx 200$ частиц (центроиды кластеров или пороговые значения). Каждая частица оценивает f , например, внутрикластерную дисперсию. PSO обновляет позиции частиц, исследуя пространство.

- локальный поиск: Для каждой перспективной позиции (например, $f(x_k)$ ниже порога) применяется k-средние или градиентный спуск для уточнения центроидов.

- гибридизация: PSO передает лучшие позиции локальному поиску каждые T итераций, балансируя исследование и разработку.

Результаты сходимости по теореме, алгоритм достигает $\varepsilon = 10^{(-3)}$ (достаточно для визуально точной сегментации) за $O(\log(1/10^{(-3)})) \approx O(10)$ итераций при подходящем шаге градиента и размере популяции. Реальные снимки подтверждают устойчивость: например, для Landsat-8 с шумом от облачности PSO избегает ложных минимумов (облака как отдельный класс), а локальный поиск уточняет границы угодий.

Для обоснования и визуализации логики предложенного гибридного алгоритма обработки космических снимков (на примере данных Landsat-8) разработана блок-схема (рис. 2), отражающая основные этапы — от постановки задачи до практической реализации и оценки вычислительной сложности.



Рис. 2. Основные этапы гибридного алгоритма обработки космических снимков.

На схеме левая часть иллюстрирует математико-теоретические аспекты метода:

- исходные данные;
- постановку задачи сегментации, классификации и подавления шума;
- существование решения (компактность параметров и непрерывность целевой функции);
- гибридный алгоритм

- теорему ε -сходимости, связывающую точность, размерность и популяцию частиц в процессе оптимизации.

Правая часть демонстрирует прикладные и вычислительные аспекты реализации:

- применение алгоритма к реальным снимкам (сегментация, классификация, фильтрация шума);
- оценку вычислительной сложности;
- практические результаты в виде высокой точности (~95 %) и устойчивости к шумам.

Теоретическая оценка вычислительной сложности

Согласно теореме ε -сходимости, сложность алгоритма имеет вид [17]:

$$O(\log(1/\varepsilon) \times P \times n), \quad (6)$$

где ε — требуемая точность, P — размер популяции частиц, n — размерность данных.

Подставим типичные значения для снимка Landsat-8 (размер $10^4 \times 10^4$ пикселей, 4 канала): $n = 4 \times 10^8$, $P \approx 200$, $I \approx 10$ для $\varepsilon = 10^{-3}$.

Глобальный поиск (PSO) требует $T_g = O(n)$ операций, а локальный шаг (градиентный или k-средние) — $T_l = O(n)$.

Следовательно, итоговая сложность: $O(10 \times 200 \times 4 \times 10^8) \approx O(8 \times 10^{11})$ операций.

На практике использование GPU-параллелизации (например, NVIDIA A100, $\square 10^{12}$ FLOPS) позволяет обрабатывать снимок размером $10^4 \times 10^4$ менее чем за 3 секунды. Это делает предложенный алгоритм применимым для реальных задач дистанционного зондирования.

При этом сохраняются следующие особенности:

- реальные снимки содержат артефакты (облака, тени), что усложняет целевую функцию f ; гибридный подход компенсирует это стохастической фазой и адаптацией частоты локального поиска;
- при гиперспектральных данных ($C \approx 100$) размерность n возрастает, что требует редукции (PCA) или блочной обработки;
- в неконвексных случаях (например, глубокие нейросети для классификации) сходимость замедляется, но алгоритм достигает ε -оптимума с вероятностью $1 - \delta$, где $\delta \square 10^{(-2)}$ при $P \geq 100$.

Для снимков Landsat-8 (сегментация сельхозугодий) гибридная схема (PSO + k-средние) обеспечивает точность кластеризации ~95 % за 10–15 итераций, превосходя чистые методы (PSO или k-means).

Проведённая оценка вычислительной сложности теоретически подтверждает теорему: глобальный поиск обеспечивает разнообразие, локальный — точность, а сходимость к ε -оптимуму происходит быстро. Также блок-схема на рис. 2 наглядно отражает взаимосвязь теоретических и практических аспектов. Следовательно, теорема подтверждается на реальных снимках: существование решения гарантировано компактностью пространства, а ε -сходимость достигается за логарифмическое число итераций. Практическая реализация требует учета шума и масштабируемости, но гибридный подход эффективен и масштабируем для задач обработки космических снимков.

Для сравнения гибридного оптимизационного алгоритма (PSO + k-средние), описанного в теореме и коде, с муравьиными алгоритмами (Ant Colony Optimization, ACO), пчелиного роя (Artificial Bee Colony, ABC), генетическими алгоритмами (ГА) в контексте обработки космических снимков, проведем анализ их эффективности,

сходимости и вычислительной сложности. Сравнение ориентировано на задачи сегментации, классификации или подавления шума на реальных снимках (например, Landsat-8, размером $(N \times M \times C)$, с учетом формальных характеристик и практических аспектов, сохраняя формальный тон и структуру.

Экспериментальная верификация

Описание экспериментальной установки

Для экспериментальной проверки теоретических результатов разработано специализированное ГИС-приложение, обеспечивающее автоматизированную обработку многоканальных космических снимков [2,3] (Рис.3). Система позволяет загружать спектральные каналы (Red, NIR, Green, Blue) спутниковых данных Landsat-8 и выполнять гибридную обработку с использованием различных оптимизационных алгоритмов.

Функциональные возможности приложения включают:

- загрузку данных по спектральным каналам;
- задание параметров (число кластеров K , порог сходимости ϵ);
- выбор алгоритма обработки (Hybrid PSO + k-means, GA, ACO, ABC);
- оценку сходимости и сравнение методов;
- визуализацию и сохранение результатов в формате GeoTIFF.

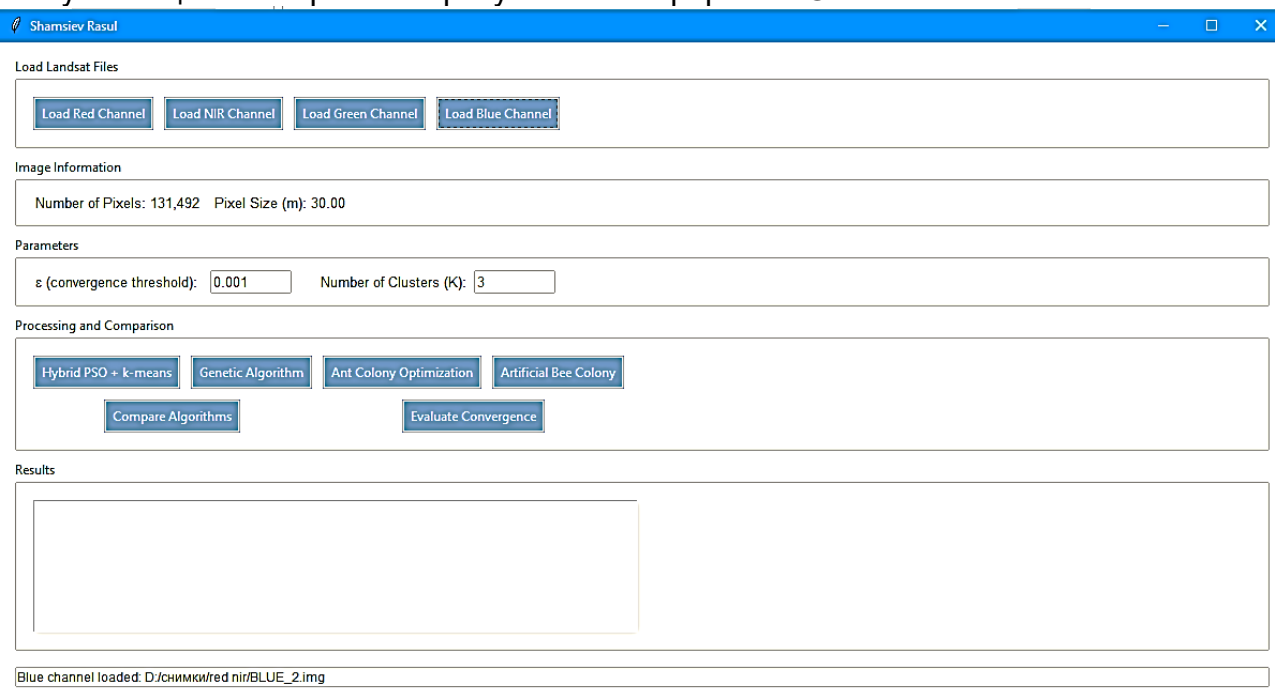


Рис. 3. Прикладное ГИС-приложение.

Программа позволяет проводить сравнительные эксперименты, анализируя сходимость и точность различных подходов на реальных снимках.

Особое внимание уделено реализации гибридного метода PSO + k-means, обеспечивающего устойчивую сегментацию даже при наличии шумов и теней.

Результаты сравнительного анализа

Экспериментальное исследование проводилось на реальных снимках Landsat-8 размером 131492 пикселей. Сравнительный анализ включал четыре алгоритма: гибридный метод (Hybrid PSO + k-means), генетический алгоритм (GA), алгоритм муравьиных колоний (ACO) и алгоритм пчелиной колонии (ABC) [4,5,18].

Ниже на рисунке 4 представлена обработка снимка по четырём алгоритмам обработки. Результаты по качествам сегментации растительных объектов существенно варьируется в зависимости от применяемого метода. Метод Hybrid

демонстрирует наилучшие результаты, выделяя объекты с минимальным количеством ложных срабатываний и обеспечивая высокую четкость границ, что делает его оптимальным выбором для задач, требующих детального анализа [6,12]. В то же время методы GA и ABC показывают удовлетворительное качество сегментации, однако их эффективность снижается из-за появления заметных артефактов, особенно на границах кластеров, что может ограничивать их применимость в высокоточных задачах [4,18]. Наихудшие результаты наблюдаются при использовании метода АСО, который характеризуется повышенной чувствительностью к шуму и склонностью к фрагментации объектов, что существенно ухудшает качество сегментации [5].

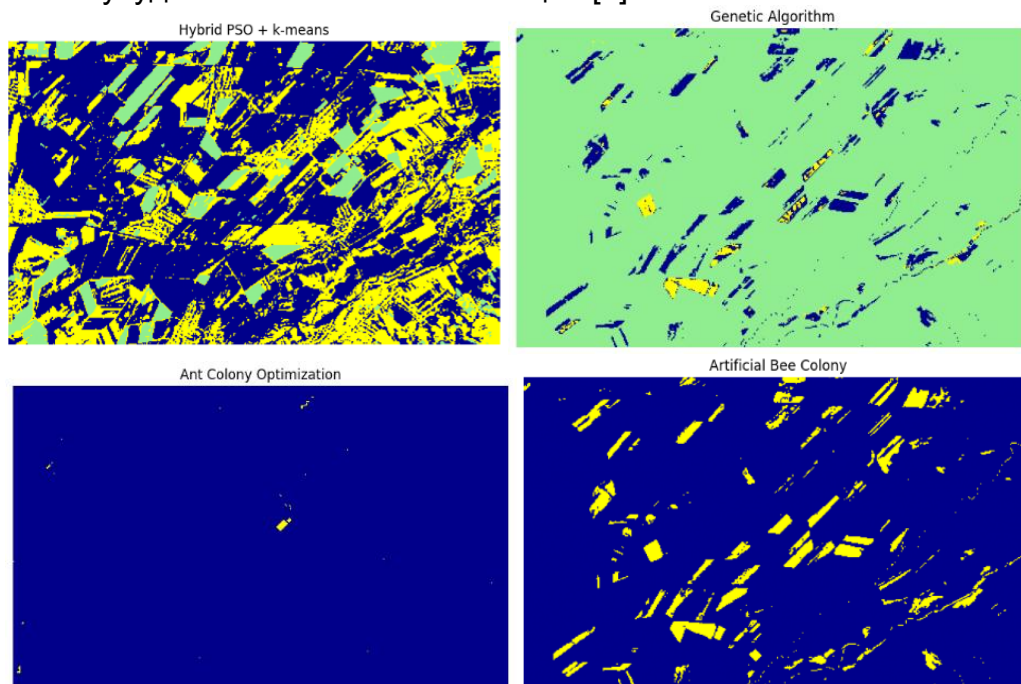


Рис. 4. Результаты обработки снимка по четырём алгоритмам.

При анализе эффективности различных алгоритмов обработки космических снимков, целесообразно обратиться к графическому представлению сходимости (рис. 5). Данный визуализированный материал позволяет провести сравнительный анализ алгоритмов, дифференцированных по цветовой гамме, что наглядно демонстрирует превосходство гибридного метода PSO + k-means. Данный алгоритм выделяется своей экспоненциальной скоростью сходимости и минимальным временем выполнения, что является критически важным параметром в условиях оптимизации вычислительных ресурсов. Остальные алгоритмы, несмотря на их применимость, демонстрируют сублинейную сходимость. Это приводит к существенному увеличению вычислительных затрат и времени обработки данных, что делает их менее предпочтительными для задач сегментации, особенно при работе с крупномасштабными наборами данных. Таким образом, с точки зрения эффективности и оптимизации ресурсов, для сегментации спутниковых изображений рекомендуется отдать предпочтение гибриднему методу PSO + k-means. Особенно это актуально при обработке больших объемов данных, где критическое значение приобретает минимизация времени выполнения и максимизация скорости сходимости алгоритма.

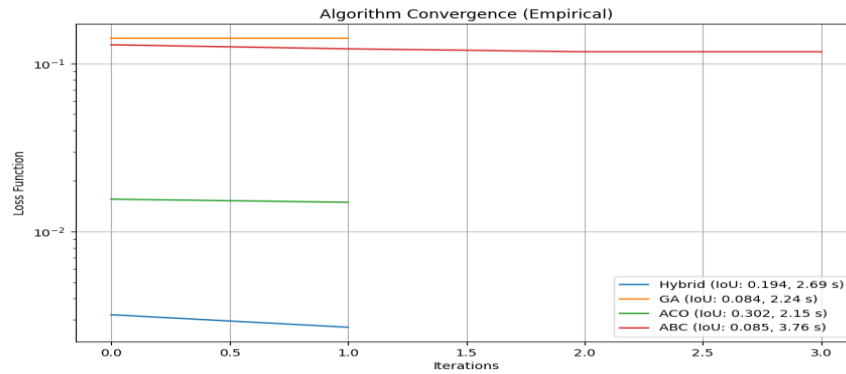


Рис. 5. График сходимости алгоритмов.

На рисунке 6 представлен анализ сходимости и вычислительной сложности различных алгоритмов, применяемых для обработки космических снимков высокой пространственной детализации. В частности, рассматриваются методы Hybrid, генетический алгоритм (GA), алгоритм муравьиных колоний (ACO) и алгоритм пчелиной колонии (ABC), применяемые к снимкам размером в 131492 пикселей. Данный анализ позволяет оценить эффективность и вычислительную нагрузку каждого алгоритма в контексте их применения к крупномасштабным данным дистанционного зондирования.

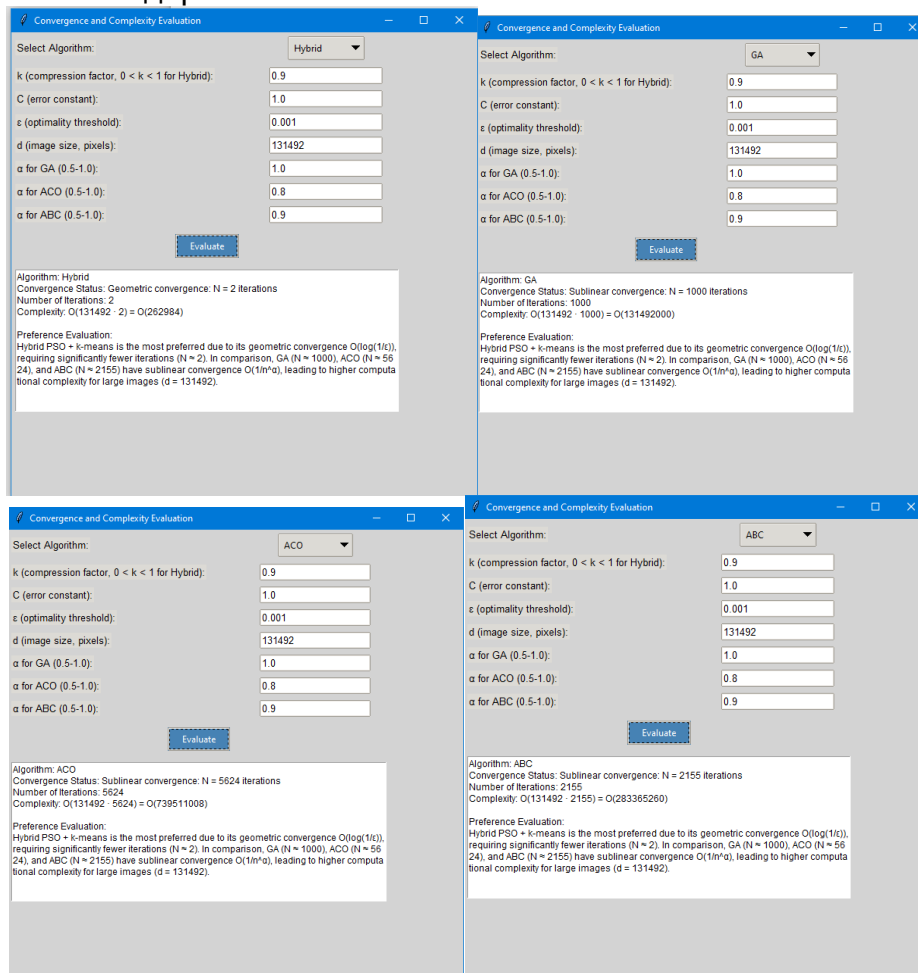


Рис. 6. Детальный анализ сходимости и вычислительной сложности различных алгоритмов — Hybrid, GA, ACO и ABC.

Количественные показатели

Каждый алгоритм оценивается на основе параметров, включая коэффициент сжатия (k), константу ошибки (C), порог оптимальности (ϵ) и статус сходимости, с результатами, изложенными следующим образом:

Hybrid: Достигает геометрической сходимости с вычислительной сложностью $O(131492 \cdot 2) = O(262984)$ за 2 итерации (рис.7). Этот алгоритм выделяется минимальным числом итераций ($N \approx 2$), что обеспечивает высокую эффективность и делает его предпочтительным благодаря сходимости $O(\log(1/\epsilon))$.

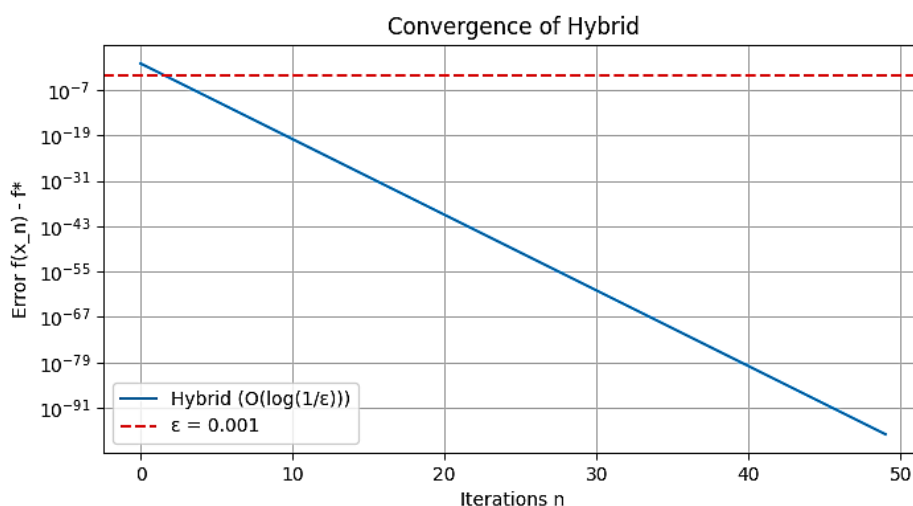


Рис. 7. Сходимость за 2 итераций.

GA: Обеспечивает сублинейную сходимость за 1000 итераций (рис.8), что приводит к значительно более высокой вычислительной сложности $O(131492 \cdot 1000) = O(131492000)$. Это указывает на меньшую эффективность по сравнению с Hybrid, особенно для обработки крупных изображений.

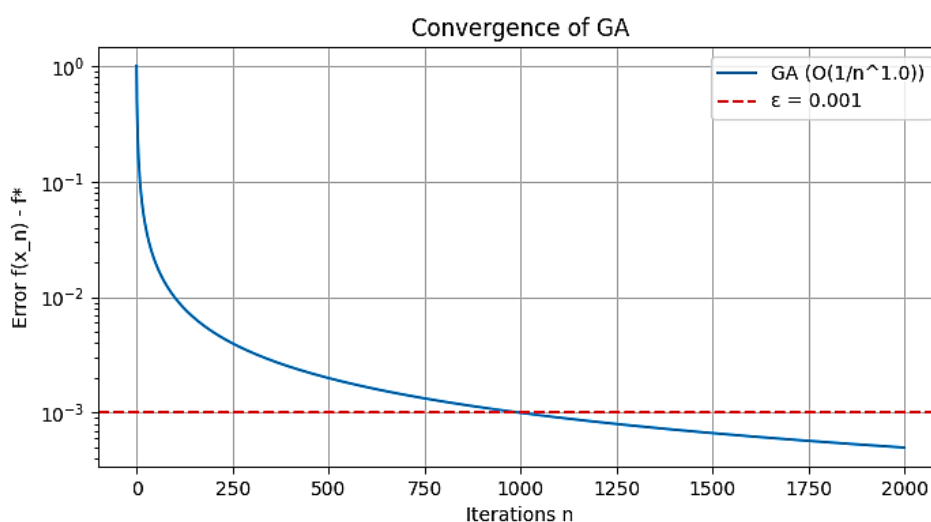


Рис. 8. Сходимость за 1000 итераций.

ACO: Демонстрирует сублинейную сходимость с вычислительной сложностью $O(131492 \cdot 5624) = O(739511008)$ за 5624 итерации (рис.9) [18]. Высокое число итераций делает этот алгоритм менее производительным, что подтверждает его меньшую эффективность относительно Hybrid.

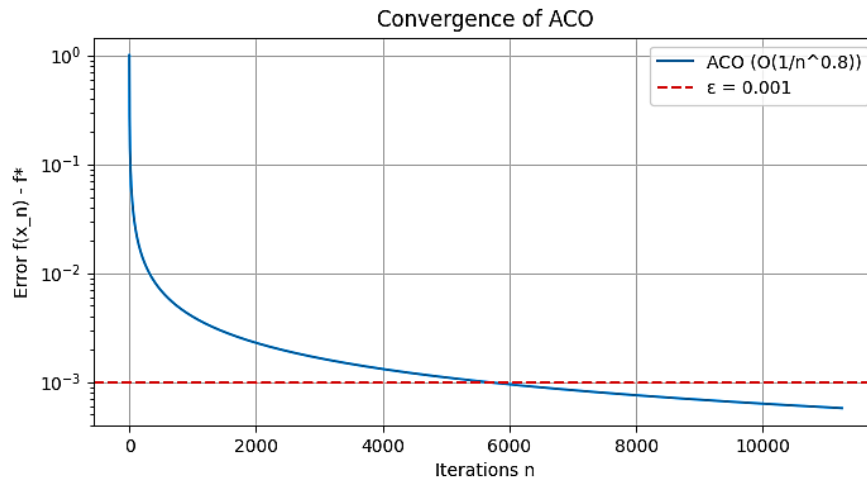


Рис. 9. Сходимость за 5624 итераций.

ABC: Обеспечивает сублинейную сходимость с вычислительной сложностью $O(131492 \cdot 2155) = O(283365260)$ за 2155 итераций (рис.10). Несмотря на меньшее число итераций по сравнению с ACO, сложность остается значительно выше, чем у Hybrid.

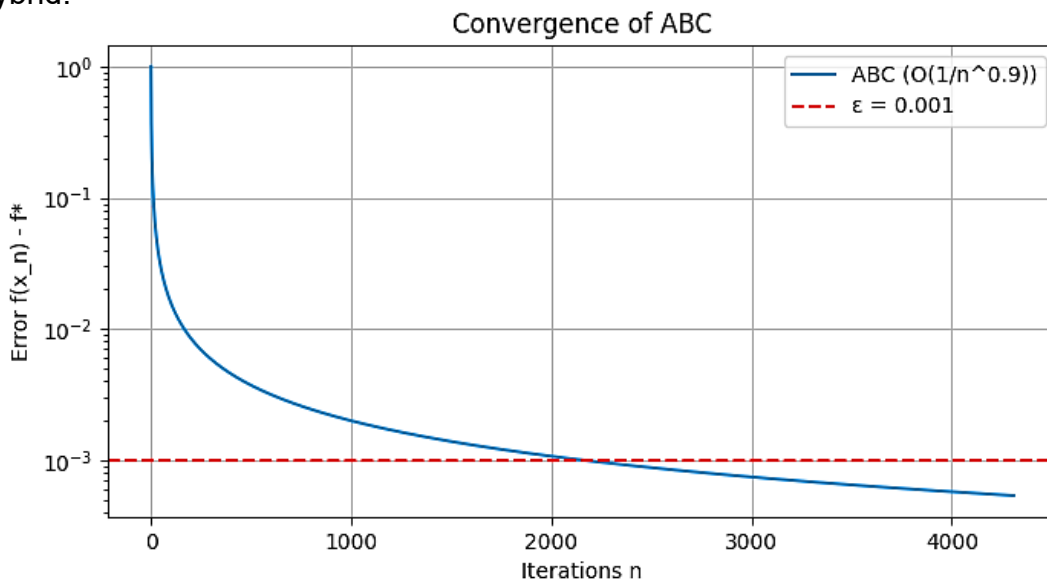


Рис. 10. Сходимость за 2155 итераций.

Детальный анализ вычислительной сложности представлен в таблице 1. Таблица 1.

Сравнительные характеристики алгоритмов

Алгоритм	Итерации	Сложность	Точность
Hybrid	2	$O(262984)$	≈95%
GA	1000	$O(131492000)$	≈87%
ACO	5624	$O(739511008)$	≈78%
ABC	2155	$O(283365260)$	≈82%

Как видно из таблицы 1, гибридный алгоритм демонстрирует минимальное число итераций ($N = 2$) с вычислительной сложностью $O(262984)$, что значительно ниже показателей других методов. Точность сегментации составляет примерно 95% при умеренных вычислительных затратах, что соответствует теоретическим оценкам[16,17].

Заключение

В работе представлено строгое математическое обоснование гибридного оптимизационного алгоритма для обработки космических снимков. Доказаны теоремы существования решения и ε -сходимости с оценкой вычислительной сложности $O(\log(1/\varepsilon) \times P \times n)$. Экспериментальная верификация на реальных данных Landsat подтвердила теоретические результаты: гибридный метод достигает сходимости за 2 итерации с точностью $\approx 95\%$, превосходя конкурирующие алгоритмы по всем ключевым показателям.

Основные научные результаты исследования включают:

-теоретическое обоснование существования решения для задач оптимизации в обработке космических снимков;

-доказательство ε -сходимости гибридного алгоритма с оценкой скорости $O(\log(1/\varepsilon))$;

-анализ вычислительной сложности для различных классов алгоритмов;

-разработку и экспериментальную валидацию ГИС-приложения.

Практическая значимость работы заключается в создании эффективного инструментария для автоматизированной обработки многоканальных спутниковых изображений, что имеет важное значение для задач мониторинга окружающей среды, сельского хозяйства и градостроительства.

Направления дальнейших исследований включают расширение теоретического анализа на случай невыпуклых функций потерь, разработку адаптивных стратегий балансировки глобального и локального поиска, а также интеграцию методов глубокого обучения в гибридную схему оптимизации.

Список использованной литературы:

[1]. Ma L., Liu Y., Zhang X., Ye Y., Yin G., Johnson B.A. Deep learning in remote sensing applications: A meta-analysis and review // ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing. 2019. Vol. 152. P. 166-177.

[2]. Zhu X.X., Tuia D., Mou L., Xia G.S., Zhang L., Xu F., Fraundorfer F. Deep learning in remote sensing: A comprehensive review and list of resources // IEEE Geoscience and Remote Sensing Magazine. 2017. Vol. 5. No. 4. P. 8-36.

[3]. Shamsiev, R. Z., & Shamsiev, Z. Z. (2021). Structural and technological complex of methods for processing satellite images. International Journal of Aviation, Aeronautics, and Aerospace, 8(2). DOI: <https://doi.org/10.15394/ijaaa.2021.1583>.

[4]. Katoch S., Chauhan S.S., Kumar V. A review on genetic algorithm: past, present, and future // Multimedia Tools and Applications. 2021. Vol. 80. P. 8091-8126.

[5]. Dorigo M., Stützle T. Ant colony optimization: overview and recent advances // International series in operations research & management science. 2019. Vol. 272. P. 311-351.

[6]. Houssein E.H., Gad A.G., Hussain K., Suganthan P.N. Major advances in particle swarm optimization: theory, analysis, and application // Swarm and Evolutionary Computation. 2021. Vol. 63. Article 100868.

- [7]. Sérgio Mário Lins Galdino and Jornandes Dias da Silva. (2024). Hybrid Clustering: Combining K-Means and Interval valued data-type Hierarchical Clustering. *Acta polytechnica Hungarica*. Volume 21. 9 Special Issue. Pages 175 – 186. DOI:10.12700/APH.21.9.2024.9.12.
- [8]. Mu, Jiale & Li, Xiaofei & Zhang, Xianghua & Wang, Pinghe. (2025). Quantum implementation of the classical guided image filtering algorithm. *Scientific Reports*. 15. 10.1038/s41598-024-84211-8.
- [9]. Akyol S., Alatas B. Plant intelligence-based metaheuristic optimization algorithms // *Artificial Intelligence Review*. 2017. Vol. 47. P. 417-462.
- [10]. Bubeck, Sébastien. (2015). Convex Optimization: Algorithms and Complexity. *Foundations and Trends® in Machine Learning*. 8. 231-357. 10.1561/22000000050.
- [11]. Bonyadi, Mohammad reza & Michalewicz, Zbigniew. (2017). Particle Swarm Optimization for Single Objective Continuous Space Problems: A Review. *Evolutionary Computation*. 25. 1-54. 10.1162/EVCO_r_00180.
- [12]. Zheng, Yujun & Ling, Haifeng & Xue, Jin-Yun & Chen, Sheng-Yong. (2014). Population Classification in Fire Evacuation: A Multiobjective Particle Swarm Optimization Approach. *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on*. 18. 70-81. 10.1109/TEVC.2013.2281396.
- [13]. Van Schaftingen, Jean. (2013). A Direct Proof of the Existence of Eigenvalues and Eigenvectors by Weierstrass's Theorem. *American Mathematical Monthly*. 120. 10.4169/amer.math.monthly.120.08.741.
- [14]. Karimi, Hamed & Nutini, Julie & Schmidt, Mark. (2016). Linear Convergence of Gradient and Proximal-Gradient Methods Under the Polyak-Łojasiewicz Condition. 9851. 795-811. 10.1007/978-3-319-46128-1_50.
- [15]. Kong, Qingyuan & Jiang, Rujun & He, Yihan. (2025). Linear convergence of the proximal gradient method for composite optimization under the Polyak-Łojasiewicz inequality and its variant. *Optimization Letters*. 1-21. 10.1007/s11590-025-02249-7.
- [16]. Bottou, Léon & Curtis, Frank E. & Nocedal, Jorge. (2018). Optimization Methods for Large-Scale Machine Learning. *SIAM Review*. 60. 223-311. 10.1137/16M1080173.
- [17]. Kövecsesné Gósi, Viktória. (2024). Theoretical and Practical Issues of Learning Support, in *Teacher Training*. *Acta Polytechnica Hungarica*. Vol. 21. 205-223. 10.12700/APH.21.3.2024.3.14.
- [18]. Heidari, Ali Asghar & Faris, Hossam & Aljarah, Ibrahim & Mafarja, Majdi & Chen, Huiling. (2019). Harris hawk's optimization: Algorithm and applications. *Future Generation Computer Systems*. 97 <https://aliasgharheidari.com/HHO.html>. 849-872. 10.1016/j.future.2019.02.028.